VARIABLE COMPLEJA
EXAMEN 4 (FINAL)
Solución

1. Sea f holomorfa en $B_1(0)$. Supóngase que $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in B_1(0) \cap \mathbb{R}$. Demostrar que $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ para todo $z \in B_1(0)$.

   Solución. La función $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es composición de la forma antiholomorfa$\circ$ holomorfa$\circ$antiholomorfa, luego es holomorfa en $B_1(0)$. Para $x \in B_1(0) \cap \mathbb{R}$, se tiene $g(x) = \overline{f(\overline{x})} = \overline{\overline{f(x)}} = f(x)$ por el hecho $\overline{x} \in \mathbb{R}$ y la hipotesis sobre f. Por el Principio de la Identidad g coincide con f en $B_1(0)$ pues coinciden en $B_1(0) \cap \mathbb{R}$. Por lo tanto $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

2. Sea h holomorfa en $\mathbb{C}$ y supóngase que

$$|h(z+7) - 3|^2 \leq |z-1|^9 + 42 \text{ para todo } z \text{ tal que } |2z + 63| > 177.$$

   Demostrar que h es un polinomio.

   Solución. Sea $|z| > 120$. Entonces $|2z + 63| > 240 - 63 = 177$, luego por hipótesis

$$|h(z+7) - 3|^2 \leq |z-1|^9 + 42 < 2^9 |z|^9 + 42 < 2^{10} |z|^9,$$

   y en consecuencia

$$|h(z+7) - 3| < 2^5 |z|^{9/5} < 2^5 |z|^5.$$

   Como esto se tiene para todo z tal que $|z| > 120$, la función entera $P(z) = h(z + 7) - 3$ es un polinomio de grado ≤ 5 (sus coeficientes de Taylor en $P(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ satisfacen $|a_k| \leq (2^5 R^5)/(R^k)$ cuando $R > 120$ por el Estimado de Cauchy y el Principio del Máximo.) Entonces $h(z) = P(z-7) + 3$ también es un polinomio.

3. Demostrar que existe un número complejo z tal que

$$\left| \cos \frac{1}{2z^4 + 3z^2 + 1} + 100 \tan^2 z + e^{-z^2} - (150 + 153i) \right| < 1.$$

   Solución. El polinomio $2z^4 + 3z^2 + 1$ vale cero en al menos un número complejo z_0 (por ejemplo, $z_0 = i$), luego $1/(2z^4 + 3z^2 + 1)$ tiene un polo en $z = z_0$. Por lo tanto $\cos 1/(2z^4 + 3z^2 + 1)$ tiene una singularidad esencial en z_0, y dado que

$\tan z$ es meromorfa, se sigue que $\cos 1/(2z^4+3z^2+1)+100\tan^2 z$ también tiene una singularidad esencial. Por el Teorema de Casorati-Weierstrass, la imagen de una vecindad perforada de z_0 es densa en $\mathbb{C}$ y en particular contiene puntos arbitrariamente cercanos al 0. (Alternativa: verificar que hay una singularidad esencial en el ∞.)

4. Demostrar que la circunferencia unitaria $\gamma = \partial B_1(0)$ no es homotópica a un punto como lazo en el dominio $\mathbb{C} - \{0\}$.

Solución. La funcion $f(z) = 1/z$ es holomorfa en el dominio. Si C fuera libremente homotópica a un punto en el dominio, entonces por el T. de Cauchy para homotopía, se tendría $2\pi i = \int_C f(z)\,dz = 0$, lo cual es falso. Por lo tanto no es nulhomotópica.

5. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Solución. Claramente la integral existe por ser el denominador un polinomio de grado mayor a 1. Sea γ_R el semicirculo superior de radio R, y $f(z) = 1/(z^4+1)$. Así $|\int_{\gamma_R} f(z)dz| \leq 2\pi R\frac{1}{R^4-1} \to 0$ cuando $R \to \infty$. En consequencia de esto y del hecho $1/((-x)^4+1) = 1/(x^4+1)$,

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = (1/2)\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = (1/2)\lim_{R\to\infty}\int_{[-\infty,\infty]\cup\gamma_R} f(z)\,dz$$

$$= (1/2)2\pi i \sum \mathrm{Res} f,$$

en lo que se toma la suma los residuos de f en el semidisco, a saber en $\alpha = e^{i\pi/4}$ y en $-\overline{\alpha}$. Puesto que $\alpha^2 = i$, $(-\overline{\alpha})^2 = -i$, esto es igual a

$$\pi i\left(\left.\frac{1}{(z^2+i)(z+\alpha)}\right|_{\alpha} + \left.\frac{1}{(z^2-i)(z-\overline{\alpha})}\right|_{-\overline{\alpha}}\right)$$

$$= \pi i\left(\frac{1}{2i\cdot 2\alpha} + \frac{1}{-2i\cdot(-2\overline{\alpha})}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\overline{\alpha}}\right) = \frac{\pi}{4}(\overline{\alpha}+\alpha) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$