VARIABLE COMPLEJA
EXAMEN 2
Solución

1. Calcular el disco de convergencia de la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^{2+k}(k^2+1)}(z-12)^k.$$

Solución. Escribiendo la serie como $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, tenemos

$$a_k^{1/k} = (-3)^{-(2+k)/k}(k^2+1)^{-1/k} = (-3)^{-2/k}(-3)^{-k/k}(k^2+1)^{-1/k}$$

$$\to (1)(\frac{1}{3})(1) = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto el radio de convergencia es $1/\limsup |a_k| = 3$.

2. Sean f_1, f_2 funciones holomorfas en $B_1(0)$. Supóngase que f_2 no se anula en $B_1(0) \setminus \{0\}$ y para $z \neq 0$ se satisface la desigualdad

$$\frac{|f_1(z)|^2}{|f_2(z)|^2} \leq \frac{e^{|z|}}{|z|}.$$

Demostrar que f_1/f_2 tiene una singularidad removible en $z = 0$.

Solución. Dato que porque $e^{|z|} < e$ en $B_1(0)$,

$$\left| z\frac{f_1}{f_2}(z) \right| \leq \sqrt{e}\sqrt{z} \to 0$$

cuando $z \to 0$. La conclusión sigue del Teorema de Riemann de las singularidades removibles.

3. Encontrar la serie de Laurent de la función $R(z) = \dfrac{z+2}{z^2-1}$ convergente en el exterior $\{|z| > 1\}$ del disco unitario.

Solución. Cuando $|z| > 1$, tenemos $\dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{z^{-2}}{1-z^{-2}} = \sum_0^\infty z^{-2k-2}$. De esto $\dfrac{z}{z^2-1} = \sum_0^\infty z^{-2k-1}$, luego

$$R(z) = \sum_0^\infty 2z^{-2k-2} + \sum_0^\infty z^{-2k-1} = \sum_{-\infty}^{-1} a_{-n} z^n$$

donde $a_n = 1$ cuando $n \leq -1$ es impar; $a_n = 2$ cuando $n \leq -2$ es par.

4. Demostrar el teorema de Casorati-Weierstrass, que la imagen de cualquier vecindad perforada de una singularidad esencial es densa en el plano.

Solución. (ver notas)

5. Calcular el residuo de

$$f(z) = \frac{1+3z^9}{z^{10}-z^{20}}$$

(a) en el punto $z = 0$; (b) en el punto $z = 1$.

Solución. (a)

$$\begin{array}{r|lllll}
 & z^{-10} & + 3z^{-1} & + \cdots & & \\ \hline
z^{10} - z^{20} & 1 & + 3z^9 & & & + \cdots \\
 & 1 & & & - z^{10} & + \cdots \\ \cline{2-5}
 & & 3z^9 & & + z^{10} & + \cdots \\
 & & 3z^9 & & & + \cdots \\ \cline{3-5}
 & & & & \cdots &
\end{array}$$

por lo que el residuo, que es el coeficiente de z^{-1}, es igual a 3.
Alternativa:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_0 \frac{1+3z^9}{z^{10}-z^{20}} &= \mathrm{Res}_0 \frac{1}{z^{10}(1-z^{10})} + \mathrm{Res}_0 \frac{3z^9}{z^{10}(1-z^{10})} \\
&= \mathrm{Res}_0 (z^{-10} + 1 + \cdots) + \mathrm{Res}_0 (3z^{-1} + \cdots) \\
&= 0 + 3 \; = \; 3
\end{aligned}$$

puesto que $(1-z^{10})^{-1} = 1 + z^{10} + \cdots$

(b) Dado que $z^{10} - z^{20} = z^{10}(1 - z^{10})$ tiene un cero simple en $z = 1$ (que se ve factorizando $1 - z^{10}$, o notando que sus ceros son las 10 raíces de 1), el residuo es

$$\lim_{z\to 1} \frac{(1+3z^9)(z-1)}{z^{10}-z^{20}} \frac{(1+3z^9)|_{z=1}}{(d/dz)|_{z=1}(z^{10}-z^{20})} = \frac{1+3}{10z^9 - 20z^{19}|_{z=1}} = -\frac{2}{5}.$$