VARIABLE COMPLEJA

EXAMEN 1

Solución

1. Definir los siguientes conceptos: (a) función conforme; (b) función armónica; (c) función localmente polinómica.

Solución. (consultar notas)

2. (a) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función localmente constante. Demostrar que f es continua.
(b) Sea $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ una función localmente constante. Demostrar que f es constante. ($B_1(0) = \{|z| < 1\}$)

Solución. (a) Sea $x \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, por hipótesis hay $\delta > 0$ tal que $|y - x| < \delta \Rightarrow f(y) = f(x)$. Así $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| = 0 < \epsilon$. Por lo tanto f es continua. (Alternativa: localmente constante $\Rightarrow$ localmente polinómica $\Rightarrow$ polinómica $\Rightarrow$ continua.)

(b) Para $c \in \mathbb{C}$ escríbase $E_c = \{z \in B_1(0): f(z) = c\}$. Cada $z \in E_c$ tiene por hipótesis una vecindad donde f toma el valor $f(z) = c$; esta vecindad está contenida en E_c . Por lo tanto E_c es abierto. En consecuencia los dos conjuntos $E_{f(0)}$ y $B_1(0) \setminus E_0 = \bigcup_{c \neq f(0)} E_c$ son abiertos. Puesto que $B_1(0)$ es conexo y $E_{f(0)}$ no es vacío, se tiene $E_{f(0)} = B_1(0)$, es decir, f toma el valor $f(0)$ en todo punto.

3. ¿En cuáles puntos de $\mathbb{C}$ es conforme la función g definida por

$$g(x, y) = (3x^2 + xy - 2y^2, 2xy + \frac{9}{2}y^2) ?$$

Solución. Se calcula

$$J_g = \begin{pmatrix} 6x + y & x - 4y \\ 2y & 2x + 9y \end{pmatrix}$$

La condición de que $J_g \in \text{Conf}_0 = \text{Conf} \cup \{0\}$ es $6x + y = 2x + 9y$, $x - 4y = -2y$, sistema que es equivalente a $x = 2y$. Por lo tanto en los puntos $(2y, y)$, $J_g \in \text{Conf}_0$ y J_g es singular precisamente cuando $y = 0$ porque $x = 0$ también. Por lo tanto el conjunto de puntos donde g es conforme ($J_g \in \text{Conf}$) es $\{(2y, y) : y \neq 0\}$.

4. Encontrar un conjugado armónico para la función $\mathbb{R}$ -valuada

$$u(x, y) = e^x \text{sen } y.$$

Solución. Un conjugado armónico $v(x, y)$ debe satisfacer la primera ecuación de Cauchy-Riemann $v_y = u_x = e^x \operatorname{sen} y$, que al integrar con respecto a y da $v(x, y) = -e^x \cos y + b(x)$ para una función indeterminada b . La segunda ecuación de Cauchy-Riemann $v_x = -u_y$ dice $-e^x \cos y + b'(x) = -e^x \cos y$, lo cual se satisface cuando (por ejemplo) $b(x) = 0$, dando $v(x, y) = -e^x \cos y$. Tal v de hecho es un conjugado armónico pues se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann. (Esto implica que u, v son armónicas.) (También $v + c$ es conjugado armónico de u para cualquier constante c .)

5. Sea $N \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$. Sea $\{a_k\}$ una sucesión con $a_k > 0$, $a_k \downarrow 0$.

Demostrar que la sumatoria $\sum_k e^{2\pi i k/N} a_k$ converge cuando $N > 1$, pero no necesariamente cuando $N = 1$.

Solución. La serie no converge necesariamente cuando $N = 1$ pues $e^{2\pi i k/N} = 1$ para todo k , y $\sum_k a_k \cdot 1$ no necesariamente converge aunque $a_k \downarrow 0$ (por ejemplo, para $a_k = 1/k$). Sea $N > 1$, escribir $s_n = \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k/N}$. Ahora $e^{2\pi i k/N} s_N = s_N$ por tratarse de dos sumas de las mismas cantidades (N -raíces de la unidad). Dado que $e^{2\pi i k/N} \neq 1$ se sigue que $s_N = 0$. Así la colección de valores $\{s_n\}$ es finita, luego acotada. Por el criterio de Dirichlet, se tiene lo afirmado.