VARIABLE COMPLEJA
Lista 8

(Solución)

1. La función analítica
$$\frac{z\exp(\operatorname{sen}(z+1))}{(z-(4+2i))(z^2-19i)}$$
tiene una serie de potencias centrada en $z=0$. Encontrar el radio de convergencia de esta serie.

   Solución. El numerador es holomorfo en $\mathbb{C}$, mientras que el denominador es holomorfo en $\mathbb{C}\setminus\{4+2i,\ \pm\sqrt{19i}\}$. Los valores absolutos de estos puntos son $\sqrt{20}$, $\sqrt{19}$. Por lo tanto, el cociente es holomorfa en $B_{\sqrt{19}}(0)$, por lo que la serie de potencias centrada en 0 converge en este disco. No puede converger en ningún disco más grande por los polos en $\pm\sqrt{19i}$. Por lo tanto el radio de convergencia es $\sqrt{19}$.

2. ¿Cuántas soluciones de la ecuación $z^5-(25+i)z^3=2$ están en el anillo $\{1<|z|<10\}$?

   Solución. Cuando $|z|=10$, el término z^5 domina los demás, es decir
$$|(25+i)z^3+2|\leq|25+i|\,10^3+2<50,000<100,000=|z^5|.$$
   Por el Teorema de Rouché, el número de ceros de $z^5-(25+i)z^3-2$ en $B_{10}(0)$ es igual al número de ceros z^5, o sea 5 (la multiplicidad de la solución $z=0$).

   Por otra parte, cuando $|z|=1$, el término $(25+i)z^3$ domina los demás, es decir
$$|z^5-2|<1^5+2=3<25<|(25+i)z^3|.$$
   Por el Teorema de Rouché, el número de ceros de $z^5-(25+i)z^3-2$ en $B_1(0)$ es igual al número de ceros $(25+i)z^3$, o sea 3.

   En consecuencia 3 de los 5 cinco ceros en $B_{10}(0)$ están en $B_1(0)$, lo cual deja dos ceros en el anillo $\{1<|z|<10\}$.

3. Evaluar la integral
$$\int_{\partial B_2(0)}\frac{10z^9+25\operatorname{senh}z+\frac{1}{2}\exp\left(\frac{z}{2}\right)\exp\left(\exp\left(\frac{z}{2}\right)\right)}{z^{10}+25\cosh z+\exp\left(\exp\left(\frac{z}{2}\right)\right)}\,dz.$$

Solución. Poner $h(z) = z^{10} + 25\cosh z + \exp(\exp(z/2))$, así el integrando es $h'(z)/h(z)$. Por el Principio del Argumento, el valor de la integral es $2\pi i$ veces el número de ceros de h en $B_2(0)$ (no tiene polos). Para $|z| = 2$, notamos

$$|z^{10}| = 1024, \quad |25\cosh z| = \frac{25}{2}|e^z + e^{-z}| \leq \frac{25}{2} \cdot 2e^2 \leq 200,$$
$$\left|\exp\left(\exp\left(\frac{z}{2}\right)\right)\right| \leq e^e < 3^3 = 27.$$

De esto $|z^{10}| > |25\cosh z + \exp(\exp(z/2))|$. Por el Teorema de Rouché, el número de ceros de h en $B_2(0)$ es igual al número de ceros de z^{10} en $B_2(0)$, que es 10. Por lo tanto la integral es igual a $20\pi i$.

4. Demostrar que

$$\sup_{|z|=0{,}3} \left| \frac{\cos \frac{z^2}{10}}{(z-1)e^{2z}} \right| < \sup_{|z|=0{,}4} \left| \frac{\cos \frac{z^2}{10}}{(z-1)e^{2z}} \right|.$$

Solución. La función $f(z) = (\cos(z^2/10))/((z-1)e^{2z})$ es holomorfa en $B_1(0)$ por ser combinación algebraica de funciones holomorfas. (No importa el polo en la frontera.) Por el Principio del Máximo, el máximo de $|f|$ en el disco $B_{0,4}(0)$ se toma en la circunferencia $\partial B_{0,4}(0)$, y como f no es constante, dicho máximo no se toma en ningún punto interior. Dado que $\partial B_{0,3}(0) \subseteq B_{0,4}(0)$, se tiene lo afirmado.

5. Sea $\gamma = \partial B_r(a)$, $f(z) = 1/z$. Supóngase que $|a| \neq r$. La imagen $f(\gamma)$ es un círculo; calcular su centro y su radio en términos de a y r.

Solución. Primero suponer $a > 0$. Si $f(\gamma)$ es un círculo, sus valores extremos serán $f(a-r)$ y $f(a+r)$, de los cuales el promedio es $C = a/(a^2-r^2)$ y la semidistancia es $R = r/|a^2-r^2|$. (Notar que C no es $f(a)$.) Entonces queremos mostrar que para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $|f(a+re^{i\theta}) - C| = R$, eso es,

$$\left| \frac{1}{a+re^{i\theta}} - \frac{a}{a^2-r^2} \right| \stackrel{?}{=} \frac{r}{|a^2-r^2|}$$

que es equivalente a

$$\left| \frac{a^2-r^2-a(a+re^{i\theta})}{a+re^{i\theta}} \right| = r\left| \frac{r+ae^{i\theta}}{a+re^{i\theta}} \right| \stackrel{?}{=} r.$$

Esto es cierto pues

$$\frac{|r+ae^{i\theta}|}{|a+re^{i\theta}|} = \frac{|e^{i\theta}||re^{-i\theta}+a|}{|a+re^{i\theta}|} = \frac{|\overline{(re^{i\theta}+a)}|}{|a+re^{i\theta}|} = 1.$$

Para a no necesariamente real, usemos la rotación $T_\alpha(z) = e^{i\alpha}z$. Se toma $\alpha = -\arg a$, y dado que $T_\alpha(z) > 0$ sabemos que f lleva el círculo $\partial B_r(T_\alpha(a))$ a $\partial B_{R'}(C')$ donde $R' = r/|e^{-2i\alpha}a^2 - r^2|$ y $C' = (e^{-i\alpha}a)/(e^{-2i\alpha}a^2 - r^2)$. Puesto que $f(T_\alpha(z)) = 1/(e^{i\alpha}z) = T_{-\alpha}(f(z))$, tenemos $f(\gamma) = T_\alpha(f(T_\alpha(\gamma))$ es el círculo con centro en

$$T_\alpha(C') = \frac{a}{e^{-2i\alpha}a^2 - r^2} = \frac{a}{|a|^2 - r^2}$$

y radio

$$R' = \frac{r}{|a|^2 - r^2}.$$