VARIABLE COMPLEJA
Lista 7

(Solución)

1. (a) Sea $X \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto cerrado y acotado. Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ continua. Demostrar: f es uniformemente continua.
(b) Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ cerrados y acotados. Sea $g\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ continua. Demostrar: g es uniformemente continua.

Solución. (b) Para cada $(z, w) \in X \times Y$ hay un $r(z, w) > 0$ tal que $(z', w') \in (B_{r(z,w)}(z) \times B_{r(z,w)}(w)) \cap (X \times Y) \implies |g(z, w) - g(z', w')| < \epsilon/2$. La cubierta

$$X \times Y = \bigcup_{(z,w)\in X\times Y} ((X \times Y) \cap (B_{r(z,w)/2}(z) \times B_{r(z,w)/2}(w))$$

tiene (por el T. de Heine-Borel para $\mathbb{R}^n$) una subcubierta finita

$$X \times Y = \bigcup_{n=1}^{N} ((X \times Y) \cap (B_{r(z_n,w_n)/2}(z_n) \times B_{r(z_n,w_n)/2}(w_n)).$$

Sea $\delta = (1/2) \min(r(z_1, w_1), \ldots, r(z_N, w_N))$. Sean $(z, w), (z', w') \in X$ tales que $|z - z'| < \delta$, $|w - w'| < \delta$.
Se puede tomar n tal que $(z, w) \in B_{r(z_n,w_n)/2}(z_n) \times B_{r(z_n,w_n)/2}(w_n)$. Por la desigualdad del triángulo,
$|z' - z_n| \leq |z' - z| + |z - z_n| < r(z_n, w_n)$, $|w' - w_n| \leq |w' - w| + |w - w_n| < r(z_n, w_n)$,es decir, $(z', w') \in B_{r(z_n,w_n)}(z_n) \times B_{r(z_n,w_n)}(w_n)$. En consecuencia

$$|g(z', w') - g(z, w)| \leq |g(z', w') - g(z_n, w_n)| + |g(z, w) - g(z_n, w_n)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto g es uniformemente continua.
(b) Definir $g\colon X \times \{0\} \to \mathbb{C}$ por $g(z, 0) = f(z)$. Se aplica la parte (a) para obtener que g es uniformemente continua, lo cual dice precisamente que f es uniformemente continua.

2. Computar $\int_{\partial B_1(0)} |z - 1|\,|dz|$.

Solución. Con la curva de integración $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, tenemos $|dz| = |ie^{it}dt| = dt$, luego la integral con respecto a longitud de arco es igual a

$$\int_0^{2\pi} |e^{it} - 1|\,dt = \int_0^{2\pi} |(\cos t + i \operatorname{sen} t) - 1|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{t}{2}}\,dt = -4\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,\frac{t}{2}\,dt$$

porque $\mathrm{sen}(t/2) \geq 0$ cuando $0 \leq t \leq 2\pi$. Por lo tanto

$$\int_{\partial B_1(0)} |z-1|\,|dz| = 2\cdot(-2\cos\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = 8.$$

3. Descomponer el integrando de $\displaystyle\int_{\partial B_2(0)} \frac{dz}{z^2+1}$ en fracciones parciales, luego usar la Fórmula Integral de Cauchy para evaluar la integral.

Solución.

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\int_{\partial B_2(0)} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) dz$$
$$= \frac{1}{2i}\left(1\big|_{z=i} - 1\big|_{z=-i}\right) = 0,$$

aplicando la Fórmula Integral de Cauchy a la función identicamente igual a 1.

4. Sea f holomorfa en el anillo $A_{R_1,R_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}\colon\ R_1 < |z-z_0| < R_2\}$. Sea $a_k = \displaystyle\int_{B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$ para $k \geq 0$.
(a) Demostrar que a_k no depende de r, donde $R_1 < r < R_2$.
(b) Demostrar que $\sum_0^\infty a_k(z-z_0)^k$ converge en $B_{R_2}(z_0)$.

Solución. (Ver notas.)

5. (a) Verificar la formula $d(|z|^2) = 2\mathrm{Re}\,(\overline{z}dz)$.
(b) Sea γ una curva cerrada dentro de un dominio D donde la funcion f es holomorfa. Demostrar que $\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)\,dz$ es imaginario.

Solución. (a) $d(|z|^2) = d(z\overline{z}) = \frac{\partial}{\partial z}(z\overline{z})\,dz + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(z\overline{z})\,d\overline{z} = \overline{z}\,dz + z\,d\overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(\overline{z}dz)$.
(Formalmente, si $z = z(t)$ es una curva, $d(|z|^2)/dt = \cdots = 2\mathrm{Re}\,(\overline{z(t)}\,dz(t)/dt)$.)
(b) Con $w = f(z)$, por un cambio de variable y luego la parte (a),

$$\mathrm{Re}\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)\,dz = \int_{f(\gamma)} \mathrm{Re}\,\overline{w}\,dw = \frac{1}{2}\int_{f(\gamma)} d(|w^2|) = |w^2|\Big|_{f(\gamma(0))}^{f(\gamma(1))} = 0$$

por ser γ una curva cerrada.
Para hacer sentido de estos cálculos formales, es simplemente

$$\mathrm{Re}\int_\sigma \overline{w}\,dw = \int_\sigma \mathrm{Re}\,\overline{\sigma(t)}\sigma'(t)\,dt = \int_\sigma \frac{d}{dt}(|\sigma(t)|^2)$$

con $\sigma = f \circ \gamma$.

6. Sea P un polinomio con coeficientes complejos. Sea $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Demostrar que

$$\int_{\partial B_R(a)} P(z)\, d\overline{z} = -2\pi i R^2 P'(a).$$

Solución. Hay coeficientes p_k tales que

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k (z-a)^k.$$

(es la serie de Taylor para P centrada en a. O se puede usar la independencia lineal de 1, $z-a$, $(z-a)^2$, $\ldots$). Este cambio de punto base facilita evaluar la integral, con $z = a + Re^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$, $\overline{dz} = -iRe^{-it}\, dt$,

$$\int_{\partial B_R(a)} P(z)\, d\overline{z} = \sum_{k=0}^{n} p_k \int_0^{2\pi} ((a + Re^{it}) - a)^k (-iR) e^{-it}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} -ip_k R^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k-1)t}\, dt = -\sum_{k=0}^{n} p_k R^{k+1} \int_{\partial B_1(0)} z^{k-2}\, dz.$$

Para $k \neq 1$, el integrando de la última integral tiene primitiva y la integral correspondiente vale 0. Para $k = 1$ la integral es $2\pi i$, luego la suma es igual a $-2\pi i R^2 p_1 = -2\pi i R^2 P'(a)$.

7. Demostrar que no existe una función holomorfa f en una vecindad de un punto $a \in \mathbb{C}$ tal que las derivadas satisfagan $|f^{(n)}(z)| > n! n^n$.

Solución. Si existiera tal f, sería holomorfa en algún disco $B_\epsilon(a)$, luego por el estimado de Cauchy,

$$\frac{1}{n!}|f^{(n)}(z)| \le c\epsilon^{-n}$$

donde $c = \sup_{|z-a|=\epsilon} |f(z)|$, y tendríamos $n^n < c\epsilon^{-n}$ para todo n. Entonces $n \log n < \log c - n$, lo cual es absurdo. Por lo tanto no existe ninguna tal función.