VARIABLE COMPLEJA
Lista 4

(Solución)

1. Demostrar el teorema de Tannery: Supóngase que $f_k(n) \in \mathbb{C}$ y $p(n) \in \mathbb{Z}$ satisfacen

- $(\forall k)\, f_k(n) \to L_k$ cuando $n \to \infty$;
- $(\forall n)\, (\forall k)\ |f_k(n)| \le M_k$;
- $\sum_0^\infty M_k < \infty$;
- $p(n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Entonces $\displaystyle\sum_0^{p(n)} f_k(n) \to \sum_0^\infty L_k$ cuando $n \to \infty$.

Solución. Primero observemos que para cada k, $|L_k| = \text{lím}_n |f_k(n)| \le M_k$, por lo que la sumatoria $\sum_0^\infty L_k$ de hecho existe por comparacion con $\sum M_k$. Sea $\epsilon > 0$ y tómese N_1 tal que $\sum_{N_1}^\infty M_k < \frac{\epsilon}{3}$. Tómese $N_2 > N_1$ tal que $n \ge N_2 \implies p(n) > N_1$, pues $p(n) \to \infty$. Tómese $N_3 > N_2$ tal que $n \ge N_3 \implies |f_k(n) - L_k| < \frac{\epsilon}{3(N_1+1)}$, pues $f_k(n) \to L_k$. Con la cota $|f_k(n) - L_k| \le |f_k(n)| + |L_k| \le 2M_k$, tenemos para cualquier $n > N_2$ que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{p(n)} f_k(n) - \sum_{k=0}^{\infty} L_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^{N_1} (f_k(n) - L_k) \ + \sum_{k=N_1+1}^{p(n)} (f_k(n) - L_k) \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{k=p(m)+1}^{\infty} L_k \right| \\
&\le \sum_{k=0}^{N_1} |f_k(n) - L_k| + \sum_{k=N_1+1}^{p(n)} (2M_k) + \sum_{k=p(m)+1}^{\infty} M_k \\
&\le (N_1+1)\frac{\epsilon}{3(N_1+1)} + 2\frac{\epsilon}{3} \ = \ \epsilon
\end{aligned}$$

que es lo que se requiere, pues ϵ era arbitrario.

2. Demostrar: $(\forall z \in \mathbb{C})\ \ (1 + \dfrac{z}{n})^n \to \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ cuando $n \to \infty$.

Solución. Sean

$$
\begin{aligned}
f_k(n) &= \begin{cases} 0, & n < k, \\ n^{-k}\binom{n}{k} z^k, & n \geq k, \end{cases} \\
&= \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) z^k, \\
L_k &= \frac{z^k}{k!}, \\
M_k &= |L_k|, \\
p(n) &= n.
\end{aligned}
$$

Luego aplicar el teorema de Tannery, observando que $f_k(n) \to L_k$ cuando $n \to \infty$ y que $\sum_0^\infty M_k = e^{|z|} < \infty$.

Conclusión: $\sum_{k=0}^n f_k(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k 1^{n-k} = (1 + \frac{z}{n})^n$.