VARIABLE COMPLEJA

Lista 3

(Solución)

1. Determinar cuáles de las siguientes series convergen, cuáles convergen absolutamente, y cuáles divergen (para las que tengan parámetros a, b, c , indicar para cuáles valores de éstas).

(a) $\sum \frac{a^k}{k!} \quad (a \in \mathbb{C})$

Solución. Trivial para $a = 0$. Para $a \neq 0$, $\frac{|a|^{k+1}}{(k+1)!} / \frac{|a|^k}{k!} = |a|/(k+1) \rightarrow 0 < 1$ cuando $k \rightarrow \infty$, luego la serie converge absolutamente por la Prueba de la Razón para todo $a \in \mathbb{C}$.

(b) $\sum \frac{k}{e^k}$

Solución. $\frac{k+1}{e^{k+1}} / \frac{k}{e^k} = (k+1)/(ke) \rightarrow 1/e < 1$ luego por la Prueba de la Razón la serie converge (absolutamente).

Alternativa: $|k/e^k|^{1/k} = k^{1/k}/e \rightarrow 1/e < 1$, misma conclusión por la Prueba de la Raíz.

(c) $\sum \frac{a^{k^2}}{b^{ck}} \quad (a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$

Solución. $\frac{a^{(k+1)^2}}{b^{c(k+1)}} / \frac{a^{k^2}}{b^{ck}} = \frac{a^{2k+1}}{b^c}$. Cuando $|a| < 1$ la razón de los valores absolutos tiende a cero y la serie converge absolutamente; cuando $|a| > 1$ la razón tiende al infinito y la serie diverge. Cuando $|a| = 1$, el valor absoluto de la razón es $|b|^{-c}$ y la serie converge absolutamente cuando esto es menor que 1 (corresponde a $|b| < 1, c > 0$ o $|b| > 1, c < 0$) y diverge cuando es mayor que 1. Cuando $|b|^{-c} = 1$ la serie tampoco converge porque los términos no tienden a cero.

Alternativa: $|a^{k^2}/b^{ck}|^{1/k} = a^k/b^c$ da la misma conclusión con la Prueba de la Raíz.

(d) $\sum 2^k \operatorname{sen}(3^{-k}a) \quad (a \in \mathbb{R})$

Solución. $2^k |\operatorname{sen} 3^{-k}a| \leq 2^k 3^{-k} |a| = (2/3)^k |a|$, luego la serie converge absolutamente para todo a por comparación con $\sum |a|(2/3)^k$.

(e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \dots = \sum \frac{1}{a_k^k}, \quad a_k = \begin{cases} 2, & k \text{ impar} \\ 3, & k \text{ par} \end{cases}$

Solución. $\sum 1/a_k^k$ converge absolutamente por comparación con la serie geométrica $\sum 1/2^k$.

$$(f) \sum \frac{1}{(\log k)^k}$$

Solución. La k -ésima raíz del k -ésimo sumando es $\frac{1}{\log k} \rightarrow 0 < 1$, luego la serie converge absolutamente por la Prueba de la Raíz.

$$(g) \sum \frac{1}{\log k} \operatorname{sen} ka$$

Solución. Supongamos primero que $a \in \mathbb{R}$. Si a es múltiplo de π la serie converge absolutamente por ser cero todos los términos, supongamos que a/π no es entero. Pongamos $a_k = \frac{1}{\log k}$, $b_k = \operatorname{sen} ka$. De la identidad

$$-2 \operatorname{sen} ka \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)a\right) - \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)a\right)$$

en la cual $\operatorname{sen}(a/2) \neq 0$, tenemos por cancelación que

$$\sum_1^n \operatorname{sen} ka = \frac{-1}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2}} \left(\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)a\right) - \cos\left(\left(\frac{1}{2}\right)a\right) \right) = \frac{\operatorname{sen} \frac{na}{2} \operatorname{sen} \frac{(n+1)a}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a}{2}}$$

luego

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \operatorname{sen} ka \right| = \left| \frac{\operatorname{sen}(na/2) \operatorname{sen}((n+1)a/2)}{\operatorname{sen}(a/2)} \right| \leq \frac{1}{\operatorname{sen}(|a|/2)}.$$

Como a está fijo y $a_k \downarrow 0$, la Prueba de Dirichlet dice que la serie $\sum a_k b_k$ converge. Sin embargo, hay un $\delta > 0$ tal $|b_k| > \delta$ para una infinidad de valores de k (si a es racional, sólo hay un número finito de valores b_k y se repiten cíclicamente, y si a no es racional, tales valores son densos en $[-1, 1]$). Por lo tanto $|a_k b_k| > \delta/\log k$ y por el criterio de comparación la serie no converge absolutamente.

Finalmente sea $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Ahora $\operatorname{sen} ka$ crece como $e^{k|\operatorname{Im} a|}$ y en consecuencia los sumandos no tienden a cero, luego la serie no converge.

$$(h) \sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} \right)$$

Solución. Las sumatorias $\sum \frac{1}{k^2}$ y $\sum \frac{1}{k^3}$ son absolutamente convergentes, luego $\sum \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \right)$ es convergente. Si la sumatoria del problema convergiera, entonces

la sumatoria $\sum \frac{1}{k} = \sum \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} \right) + \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \right) \right)$ también sería convergente, lo cual es falso. Por lo tanto no converge.

Alternativa: el sumando es $(k^2 - k + 1)/k^3$ lo cual es mayor a $2/k$ para k grande, por tanto la serie no converge por la Prueba de la Comparación.

$$(i) \sum \frac{(k-a)^2}{(k-b)^3} \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

Solución. Sea $a_k = (k-a)^2/(k-b)^3$. No importan cuáles sean $a, b \in \mathbb{C}$, existe $c > 0$ tal que $\left| a_k - \frac{1}{k} \right| < \frac{c}{k^2}$ para todo k suficientemente grande (pues por cancelación, la fracción $a_k - \frac{1}{k}$ se reduce a un cuadrático entre un cuártico). Si $\sum a_k$ convergiera, entonces $\sum (\frac{1}{k} - a_k) + \sum a_k = \sum \frac{1}{k}$ convergería (la primera sumatoria por comparación con $\sum c/k^2$), lo cual no es el caso. Por lo tanto la serie no converge.

$$(j) \sum \frac{i^k}{\sqrt{k}}$$

Solución. Claramente no converge absolutamente, por comparación con $\sum 1/k$. Con $a_k = k^{-1/2}$ y $b_k = i^k$ se verifica que $\sum^N i^k$ toma un número finito de valores luego la serie del problema converge condicionalmente por la Prueba de Dirichlet.

$$(k) \sum \frac{1}{k \log k}$$

Solución. Puesto que $\int \frac{1}{x \log x} dx = \log \log x \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$, la serie diverge por comparación con la serie $\sum_k \int_k^{k+1} \frac{1}{x \log x} dx$. (Se llama el Criterio de la Integral.)

$$(l) \sum \frac{1}{(\log k)^2}$$

Solución. Diverge por comparación con la anterior, pues $1/k < 1/\log k$.

$$(m) \sum \left(\frac{1}{k} - \frac{a}{\log k} \right) \quad (a \in \mathbb{C})$$

Solución. Si $a = 0$ la serie claramente diverge; sea $a \neq 0$. Escribamos $\beta(k) = \frac{\log k}{k} \rightarrow 0$. Entonces

$$\left| \frac{1}{k} - \frac{a}{\log k} \right| = \left| \frac{1}{\log k} (\beta(k) - a) \right| > \frac{|a|}{2 \log k}$$

cuando k es tan grande que $\beta(k) < |a|/2$. Por comparación con $\sum \frac{1}{\log k} > \sum \frac{1}{k}$, la serie diverge.

2. Sean $a_n \in \mathbb{C}$, $\sum a_n$ convergente. Demostrar: (a) $\sum n^{1/n} a_n$ converge, (b) $\sum (1 + 1/n)^n a_n$ converge.

Solución. Verificar que (a) $n^{1/n} \downarrow$, mientras que (b) $(1 + 1/n)^n \uparrow$, ambas sucesiones a límites acotados; aplicar el criterio de Abel:

Para (a), notar $\frac{d}{dx} \frac{\log x}{x} = \frac{1 - \log x}{x^2} < 0$ cuando $x > e$. Así $\frac{\log n}{n} > \frac{\log(n+1)}{n+1}$ por lo que $n^{1/n} > (n+1)^{1/(n+1)}$.

Para (b), usar la desigualdad de las medias aritmética y geométrica $(1/N) \sum_1^N c_k \geq (\prod_1^N c_k)^{1/N}$ (para $c_k \geq 0$) con $N = n + 1$ términos $c_k = 1 + 1/n$, $c_0 = 1$,

$$\frac{1}{n+1}(1 + n(1 + 1/n)) \geq (1 \cdot (1 + \frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{n+1}},$$

luego

$$(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \geq (1 + \frac{1}{n})^n.$$

3. Dar ejemplos de sucesiones $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ tales que $\{a_k\}$ converge y $\sum b_k$ converge, pero $\sum a_k b_k$ no converge.

Solución. (Posibilidad) Sea $a_k = (-1)^k / \sqrt{k}$, sabemos que $\sum a_k$ converge. Sea $b_k = a_k$, luego $\sum a_k b_k = \sum 1/k$ diverge.

4. Sea E cualquier conjunto, $a_k: E \rightarrow \mathbb{R}$, $b_k: E \rightarrow \mathbb{C}$ para $k = 1, 2, \dots$. Supóngase que $\sum_1^\infty b_k(x)$ converge uniformemente sobre $x \in E$ y que $\{a_k(x)\}$ es una sucesión monótona, uniformemente acotada sobre $x \in E$. Demostrar: $\sum_1^\infty a_k(x)b_k(x)$ converge uniformemente sobre $x \in E$.

Solución. Tenemos una cota $|a_k(x)| < A$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, $x \in E$. Por ser $\sum b_k(x)$ uniformemente convergente, es uniformemente de Cauchy: dado $\epsilon > 0$ hay N_1 tal que $|\sum_{N_1}^{N_2} b_k(x)| < \epsilon$ para todo $N_2 > N_1$ y todo $x \in E$. Supongamos que a_k es decreciente. Por la desigualdad de Abel, $|\sum_{N_1}^{N_2} a_k(x)b_k(x)| < a_1(x)\epsilon$ para todo N_2, x . Así $|\sum_{N_1}^{N_2} a_k(x)b_k(x)| < A\epsilon$ para todo $N_2 > N_1$. Esto dice que la serie $\sum_k a_k(x)b_k(x)$ es uniformemente de Cauchy en E , por lo que converge uniformemente en E .

Si a_k es creciente, aplicamos lo anterior con $\{-a_k(x)\}$ en lugar de $\{a_k(x)\}$.