VARIABLE COMPLEJA

Lista 2

(Solución)

1. Sea $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Para θ fijo, escríbase $L_\theta = \{(t \cos \theta, t \sin \theta) : t \geq 0\}$. Calcular el ángulo entre $T(L_0)$ y $T(L_\theta)$ en $(0, 0)$, en términos de a, b, c, d, θ .

Solución.

$$\begin{aligned} \text{áng}(T(L_0), T(L_\theta)) &= \text{áng}(T(L'_0(0)), T(L'_\theta(0))) = \text{áng}(T(1, 0), T(\cos \theta, \sin \theta)) \\ &= \text{áng}((a, b)^t, (a \cos \theta + c \sin \theta, b \cos \theta + d \sin \theta)^t) \\ &= \text{arc cos} \frac{(a, b)^t \cdot (a \cos \theta + c \sin \theta, b \cos \theta + d \sin \theta)^t}{|(a, b)^t| |(a \cos \theta + c \sin \theta, b \cos \theta + d \sin \theta)^t|} \\ &= \text{arc cos} \frac{(a^2 + b^2) \cos \theta + (ac + bd) \sin \theta}{(a^2 + b^2)^{1/2} ((a^2 + b^2) \cos^2 \theta + 2(ac + bd) \cos \theta \sin \theta + (c^2 + d^2) \sin^2 \theta)^{1/2}}. \end{aligned}$$

2. Sea $T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ una transformación lineal no-singular (i.e., $ad - bc \neq 0$). Demostrar que T es conforme o anticonforme si y sólo si multiplica las longitudes de todos los vectores por un mismo factor ($|T(v)|/|v|$ es constante).

Solución. Consideremos la factorización de $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $T = R_\alpha A R_\beta$ donde $A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ y R_α, R_β son rotaciones, y $r, s \neq 0$ por ser T no-singular. Dado que las rotaciones son conformes y conservan longitudes de vectores, sólo falta demostrar que A es conforme o anticonforme si y sólo si multiplica las longitudes de todos los vectores por un mismo factor.

Supóngase que A es conforme o anticonforme. Entonces $s = \pm r$. Luego para cualquier vector (v_1, v_2) , tenemos

$$|Av| = |(rv_1, \pm rv_1)| = |r||v|$$

por lo que las longitudes de todos los vectores se multiplican por el mismo factor $|r|$.

Ahora supóngase que $|Av| = \lambda|v|$ para todo vector v , es decir

$$r^2 v_1^2 + s^2 v_2^2 = \lambda(v_1^2 + v_2^2)$$

para cualesquier $v = (v_1, v_2)$. Con $v = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ obtenemos

$$r^2 = \lambda, \quad s^2 = \lambda,$$

respectivamente, por lo que $r = \pm s$ y A es conforme o anticonforme.

3. $(\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}) \quad z_n \rightarrow \infty \iff (\operatorname{Re} z_n \rightarrow \infty \text{ o } \operatorname{Im} z_n \rightarrow \infty)$.

Solución. $\Rightarrow$. La afirmación no es cierta, como se muestra con el ejemplo $z_n = n$ para n par, $z_n = ni$ para n impar. Con este ejemplo $|z_n| = n \rightarrow \infty$, pero ni $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \infty$ ni $\operatorname{Im} z_n \rightarrow \infty$.

$\Leftarrow$. Supóngase que $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \infty$ o $\operatorname{Im} z_n \rightarrow \infty$. Entonces $|z_n| \rightarrow \infty$. Por lo tanto $|z_n| \geq \max(|\operatorname{Re} z_n|, |\operatorname{Im} z_n|) \rightarrow \infty$, o sea, $z_n \rightarrow \infty$.

4. Sea f una función diferenciable en un dominio en $\mathbb{C}$, y conforme en el punto (x_0, y_0) . Demostrar que f es invertible cerca de (x_0, y_0) y que su inversa f^{-1} es conforme en el punto $f(x_0, y_0)$.

Solución. Por hipótesis $J_f|_{(x_0, y_0)} \in \text{Conf}$, en particular $\det J_f|_{(x_0, y_0)} \neq 0$. Por el Teorema de la Función inversa, hay una vecindad de $f(x_0, y_0)$ en la cual existe una inversa f^{-1} . Por la Regla de la Cadena,

$$J_{f^{-1}}|_{f(x_0, y_0)} = (J_f|_{(x_0, y_0)})^{-1} \in \text{Conf}$$

porque Conf es un campo. Es decir, f^{-1} es conforme en el punto $f(x_0, y_0)$.

5. Sean D, D' dominios en $\mathbb{C}$, y sea $f: D \rightarrow D'$ una función inyectiva y conforme. Sea $\phi: D' \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica. Demostrar que la composición $\phi \circ f$ es también armónica. ¿Es cierto cuando f es anticonforme?

Solución. Pongamos $f = u + iv$. Indicando derivadas parciales por subíndices,

$$\begin{aligned} \Delta(\phi \circ f) &= (\phi \circ f)_{xx} + (\phi \circ f)_{yy} \\ &= (\phi_{uu}u_x + \phi_{uv}v_x)u_x + \phi_u u_{xx} + (\phi_{vu}u_x + \phi_{vv}v_x)v_x + \phi_v v_{xx} \\ &\quad + (\phi_{uu}u_y + \phi_{uv}v_y)u_y + \phi_u u_{yy} + (\phi_{vu}u_y + \phi_{vv}v_y)v_y + \phi_v v_{yy}. \end{aligned}$$

Como f es conforme, u, v son armónicas, $u_{xx} + u_{yy} = 0 = v_{xx} + v_{yy}$, luego

$$\Delta(\phi \circ f) = \phi_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + \phi_{uv}(v_x u_x + v_y u_y) + \phi_{vu}(u_x v_x + u_y v_y) + \phi_{vv}(v_x^2 + v_y^2).$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, y por la relación $\phi_{uv} = \phi_{vu}$ por ser ϕ de clase C^2 ,

$$\Delta(\phi \circ f) = ((\Delta\phi) \circ f) (u_x^2 + v_x^2) = 0.$$

Por lo tanto $\phi \circ f$ es armónica.

Ahora supongamos que f es anticonforme. La función $g = f \circ C$ es conforme donde $C(\xi) = \bar{\xi}$. Por lo anterior, $\phi \circ g$ es armónica. Luego con $z = x + iy = \xi - i\eta$, tenemos $(\phi \circ g)_\xi = (\phi \circ f)_x$, $(\phi \circ g)_\eta = -(\phi \circ f)_y$, luego $(\phi \circ g)_{\xi\xi} = (\phi \circ f)_{xx}$, $(\phi \circ g)_{\eta\eta} = (\phi \circ f)_{yy}$, luego $\Delta(\phi \circ f)|_{\bar{\xi}} = \Delta(\phi \circ g)|_\xi = 0$, y también en este caso $\phi \circ f$ es armónica.

6. Demostrar que la suma de dos funciones conformes es conforme en todo punto que no es singular.

Solución. Sean f, g conformes en algún dominio común. Entonces en cualquier punto z , $J_f|_z, J_g|_z \in \text{Conf}$. Como $\text{Conf} \cup \{0\}$ es un campo,

$$J_{f+g}|_z = J_f|_z + J_g|_z \in \text{Conf} \cup \{0\}.$$

En un punto z en donde $f + g$ no es singular, $J_{f+g}|_z \neq 0$, luego $J_{f+g}|_z \in \text{Conf}$, es decir, $f + g$ es conforme en z .

7. Encontrar el conjunto de puntos (x, y) donde la función $f(x, y) = (x^2 - y, x + y^2)$ sea conforme. Dibuje una representación gráfica del comportamiento de f cerca de $(x_1, y_1) = (1, 1)$, y de $(x_2, y_2) = (1, -1)$, junto con una gráfica de la aproximación lineal, de manera que ilustre qué tanto ésta es aproximación a aquella cerca de (x_i, y_i) . (Sugerencia: mostrar algún conjunto cerca de (x_i, y_i) y también su imagen, para cada caso.)

Solución. Se calcula

$$J_f = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -1 & 2y \end{pmatrix}.$$

Notar que siempre $J_f \neq 0$ por las entradas ± 1 , que no dependen de x, y . Entonces $\{(x, y): J_f \in \text{Conf}\} = \{(x, y): x = y\}$.

Para la gráfica, se sugiere tomar cerca de (x_i, y_i) segmentos horizontales y verticales, y graficar sus imágenes bajo f así como bajo la aproximación lineal. Luego notar que para $i = 1$ las imágenes son ortogonales para la aproximación lineal y aproximadamente lineales para f misma. Para $i = 2$ los cuadrados van a paralelogramos chuecos.

Como alternativa, graficar las imágenes de círculos pequeños centrados en (x_i, y_i) y notar que las imágenes son (casi) círculos en un caso, y elipses no-circulares en el otro.