VARIABLE COMPLEJA
Lista 1

(Solución)

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supóngase que f es localmente polinómica (cada $x \in \mathbb{R}$ tiene una vecindad $(x-\delta, x+\delta)$ en la cual f coincide con algún polinomio).

   Demostrar que f es polinómica (coincide con algún polinomio en todo $\mathbb{R}$).

Solución. Tomando primero $x = 0$, por ser f localmente polinómica obtenemos un $\delta > 0$ y un polinomio P de algún grado n tal que $f = P$ en la vecindad $(-\delta, \delta)$ de 0; es decir, $f|_{(-\delta,\delta)} = P|_{(-\delta,\delta)}$. Sea $x_0 = \sup\{a > 0\colon\ f = P \text{ en } (0,a)\}$. Así $x_0 \geq \delta$.

Supóngamos que $x_0 < \infty$. Por hipótesis hay un $\delta_0 > 0$ y un polinomio P_0 de algún grado n_0 tal que $f = P_0$ en la vecindad $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ de x_0. Entonces $P - P_0 = 0$ en los puntos $x_0 - \delta_0/k$ para $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \max(n, n_0) + 1$. Un polinomio distinto de 0 no puede tener más ceros que su grado, por lo que $P - P_0$ es idénticamente cero, por lo que P, P_0 son el mismo polinomio. Luego $f(x) = P(x)$ para $x_0 \leq x < x_0 + \delta_0$ y por tanto para $0 < x < x_0 + \delta_0$, contrario a la definición de x_0. De la contradicción se concluye que $x_0 = \infty$, es decir $f = P$ en $[0, \infty)$.

Usando $f(-x)$, $P(-x)$ en lugar de $f(x)$, $P(x)$ de lo que acabamos de demostrar deducimos que $f = P$ en $(-\infty, 0]$, luego $f = P$ en todo $\mathbb{R}$. Así f es polinómica.

Alternativa: Escoger P como arriba, luego definir $A = \{x\colon\ f = P$ en alguna vecindad de x$\}$. Es inmediato que A es abierto, pues para cada punto en A, la vecindad mencionada en la definición está contenida en A. Por construcción de P, tenemos $0 \in A$, por lo que A es no-vacío. Sean $\{x_j\} \subseteq A$, $x_j \to x \in \mathbb{R}$. Por ser f localmente polinómica, hay una vecindad V de x y un polinomio Q que coincida con f en V. Para todo j grande se tiene $x_j \in V$, y tomamos tan sólo un tal j. Por el hecho $x_j \in A$, hay una vecindad W de x_j en la que P coincide con f, luego P coincide con Q en el abierto $U \cap V$. Por ser $x_j \in U \cap V$, este abierto es no-vacío y tiene una infinidad de puntos, luego $P = Q$ (son el mismo polinomio). Puesto que $f = Q$ en V, esto implica que $f = P$ en V, luego entonces $\lim_j x_j = x \in A$ por definición de A. Así A es también cerrado, y como $\mathbb{R}$ es conexo, $A = \mathbb{R}$ como se tenía que demostrar.
(Nota: Si se definera A como $\{x\colon\ f(x) = P(x)\}$, este argumento no funcionaría.)