VARIABLE COMPLEJA #22

LOS CÍRCULOS Y SUS MAPS

22.1. Definición. Un *círculo en* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es un subconjunto que es o bien (i) una circunferencia ordinaria en $\mathbb{C}$, o bien (ii) una unión $L \cup \{\infty\}$ donde $L \subseteq \mathbb{C}$ es una recta. Se escribe $\mathcal{K} = \{$círculos en $\widehat{\mathbb{C}}\}$.

Proposición. Cada subconjunto de $\widehat{\mathbb{C}}$ de tres puntos es subconjunto de un único elemento de $\mathcal{K}$.

Definición. Una *transformación de Möbius* es una función $T\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ no-constante de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \in \mathbb{C}). \tag{1}$$

Cuando $c = 0$ se entiende $T(\infty) = \infty$. Cuando $c \neq 0$ se entiende $T(-d/c) = \infty$, $T(\infty) = a/c$. Se escribe

$$\operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}} = \{\text{transformaciones de Möbius}\}.$$

Del hecho de que T es no-constante se tiene $ad - bc \neq 0$ y se puede suponer $ad - bc = 1$ cuando sea conveniente. Con esta condición, a, b, c, d son casi únicos: sólo se podrían cambiar para $-a, -b, -c, -d$.

Proposición. Toda $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ es un homeomorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$ y es holomorfa en $\widehat{\mathbb{C}} - \{-d/c\}$, con polo simple en $-d/c$ (cuando $c \neq 0$). $\operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ es un grupo.

22.2. Sea $K = \partial B_r(p) = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-p|^2 = r^2\}$, i.e.

$$K = \{z\colon\ z\overline{z} - \overline{p}z - p\overline{z} + (|p^2| - r^2) = 0\}.$$

Consideremos un conjunto definido como

$$K_1 = \{z\colon\ Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\,\overline{z} + C = 0\}$$

donde $A, C \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathbb{C}$. Si $A \neq 0$, se obtiene K de la forma de un K_1 por medio de $p = -\overline{B}/A$, $r^2 = (|B|^2 - AC)/A^2$, y obviamente

$$|B|^2 - AC > 0.$$

Esta desigualdad garantiza que $r > 0$ y que K_1 es el círculo K. Cuando $A = 0$, entonces $B \neq 0$ y luego K_1 es una recta. Por lo tanto

Proposición. Todo elemento de $\mathcal{K}$ se da mediante una fórmula del tipo K_1.

22.3. Proposición. Sea $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$. Para todo $K \in \mathcal{K}$, se tiene $T(K) \in \mathcal{K}$.

Demostración. Sea $T_0(z) = 1/z$, luego para $z \in K$, el punto $w = T_0(z)$ satisface

$$C|w|^2 + \overline{B}w + B\overline{w} + A = 0, \quad C, A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{C}, \quad |B|^2 - CA > 0,$$

por lo que $T_0(K) \in \mathcal{K}$ cuando $K \in \mathcal{K}$. Para $T_1(z) = az + b$ está claro también que $T_1(K) \in \mathcal{K}$ (sin pensar en A, B, C). Para $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ en general, si $c = 0$ en (1) entonces T es del tipo de T_1, y si $c \neq 0$ tenemos

$$T(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2(z + \frac{d}{c})}$$

que es una composición de varias funciones del tipo de T_0 y T_1. Es inmediata la conclusión que $T(K) \in \mathcal{K}$. $\square$

22.4. Notemos que cuando dos círculos, o un círculo y una recta, se intersectan en dos puntos, los cuatro ángulos formados en estos dos puntos son iguales.

Definición. Para $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, escribimos $\mathcal{K}_z = \{K \in \mathcal{K} : z \in K\}$. Cuando $z_1 \neq z_2$, escribimos $\mathcal{K}_{z_1,z_2} = \mathcal{K}_{z_1} \cap \mathcal{K}_{z_2}$ (*círculos de Apolonio* por z_1, z_2). También escribimos

$$\mathcal{K}^{\perp}_{z_1,z_2} = \{K \in \mathcal{K}\colon\ K \text{ es ortogonal a cada elemento de } \mathcal{K}_{z_1,z_2}\}$$

(*red de Steiner* por z_1, z_2).

Proposición. Si $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$,

$$T(\mathcal{K}_z) = \mathcal{K}_{T(z)}, \quad T(\mathcal{K}_{z_1,z_2}) = \mathcal{K}_{T(z_1),T(z_2)}, \quad T(\mathcal{K}^{\perp}_{z_1,z_2}) = \mathcal{K}^{\perp}_{T(z_1),T(z_2)}.$$

Demostración. Proposición anterior, y que las transformaciones de Möbius son conformes.

22.5. Proposición. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos. Entonces existe una única $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ con $T(z_1) = 1$, $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = \infty$.

Demostración. Primero veamos que existe tal T. (a) Supóngase que $z_2 = 0$, $z_3 = \infty$. Entonces $z_1 \neq \infty$, y la T deseada es $T(z) = z/z_1$.

Notemos que para este caso, T es única pues $b = c = 0$ en la fórmula (1) para cualquier T que fija $0, \infty$. (b) Supóngase solamente que $z_3 = \infty$. Entonces $z_2 \neq \infty$. Sea $T_1(z) = z - z_2$, luego $T_1(z_2) = 0$, $T_1(\infty) = \infty$. Sea T_2 dada por (a) usando $T(z_1)$ en el papel de z_1, es decir T_2 satisface $T_2(T_1(z_1)) = 1$, $T_2(0) = 0$, $T_2(\infty) = \infty$. La T deseada es $T = T_2 \circ T_1$. (c) Supóngase que $z_3 \neq \infty$. Sea $T_1(z) = 1/(z - z_3)$, luego $T_1(z_3) = \infty$. Sea T_2 por (b) tal que $T_2(T_1(z_1)) = 1$, $T_2(T_1(z_2)) = 0$, $T_2(\infty) = \infty$. La T deseada es $T = T_2 \circ T_1$.

T es única pues de haber otra tal T^*, la composición $T^* \circ T^{-1}$ fijaría $1, 0, \infty$, y por la observación en (a) hay sólo una tal (usando 1 en el papel de z_1), luego $T^* \circ T^{-1}$ sería la identidad. $\square$

22.6. Definición. La *razón cruzada* de cuatro puntos z_0, z_1, z_2, z_3 en $\widehat{\mathbb{C}}$ es el número complejo

$$\lambda(z_0, z_1, z_2, z_3) = T(z_0)$$

donde $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ es la única transformación de Möbius tal que $T(z_1) = 1$, $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = \infty$.

Nota. No es esencial que z_0 sea distinto de z_1, z_2, z_3, sólo que z_1, z_2, z_3 sean distintos. En diversos libros los papeles de z_0, z_1, z_2, z_3 pueden encontrarse permutados al definir razón cruzada (hay 6 posibles definiciones). Los siguientes enunciados son (casi) inmediatos.

Proposición. Si $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$, entonces

$$\lambda(Tz_0, Tz_1, Tz_2, Tz_3) = \lambda(z_0, z_1, z_2, z_3).$$

Proposición. $\lambda(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \widehat{\mathbb{R}} \iff z_0, z_1, z_2, z_3$ son cocirculares (es decir, pertenecen a algún elemento de $\mathcal{K}$).

22.7. Proposición. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos. Sean $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos. Entonces existe una única $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ con $T(z_1) = w_1$, $T(z_2) = w_2$, $T(z_3) = w_3$. (Esto dice que la acción de $\operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$ es triplemente transitiva.)

Demostración. Existe porque podemos tomar $T = T_2^{-1} \circ T_1$ donde T_1 lleva z_1, z_2, z_3 en $1, 0, \infty$ y T_2 lleva w_1, w_2, w_3 en $1, 0, \infty$. Si hubiese dos tales T, digamos T, T^*, entonces la composición $S = T^{-1}T^*$ fijaría z_1, z_2, z_3. Luego $T_1 S T_1^{-1}$ fijaria $1, 0, \infty$. Puesto que sólo hay un elemento de $\operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ que fija estos tres puntos especiales, $T_1 S T_1^{-1}$ sería la identidad, luego S sería la identidad, luego $T^* = T$. $\square$

Cuando ninguno de z_1, z_2, z_3 es ∞, se puede encontrar la fórmula para $w = T(z)$ resolviendo

$$\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} \frac{w - w_2}{w - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \frac{z - z_2}{z - z_3}$$

para w. Esta ecuación es $\lambda(w, w_1, w_2, w_3) = \lambda(z, z_1, z_2, z_3)$.

22.8. Proposición. Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$. Entonces existe $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $T(K_1) = K_2$. (Se dice que la acción de $\operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ en $\mathcal{K}$ es transitiva.)

Demostración. Tomamos $z_1, z_2, z_3 \in K_1$ distintos, $w_1, w_2, w_3 \in K_2$ distintos. Puesto que tres puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ determinan un elemento de $\mathcal{K}$, la T que lleva z_i en w_i de la proposición anterior sirve. $\square$

Cada $K \in \mathcal{K}$ separa $\widehat{\mathbb{C}}$ en dos partes, que se llaman *discos en* $\widehat{\mathbb{C}}$.

Proposición. $\operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ actúa transitivamente en también en $\{$discos en $\widehat{\mathbb{C}}\}$.

22.9. Definición. Escribimos $\rho(z) = \overline{z}$ para $z \in \mathbb{C}$; $\rho(\infty) = \infty$.

Proposición. $\rho\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es un homeomorfismo anticonforme.

Demostración. Ya sabemos que $\rho|_{\mathbb{C}}$ es un homeomorfismo anticonforme de $\mathbb{C}$. Claramente es una biyección de $\widehat{\mathbb{C}}$. En el punto ∞, consideramos la variable auxiliar $t = 1/z$, es decir la función

$$\frac{1}{\rho(1/t)} = \bar{t}$$

que es anticonforme (en particular continua) cerca de $t = 0$. $\square$

Proposición. (a) Sea $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $T(\widehat{\mathbb{R}}) = \widehat{\mathbb{R}}$. Entonces $T \circ \rho = \rho \circ T$.
(b) Sea $K \in \mathcal{K}$, y sean $T_1, T_2 \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ tales que $T_1(K) = T_2(K) = \widehat{\mathbb{R}}$. Entonces $T_1^{-1} \rho T_1 = T_2^{-1} \rho T_2$.

Demostración. (a) Para cualquier función holomorfa T que envía los reales en reales, las funciones holomorfas T y $z \mapsto \overline{T(\overline{z})}$ coinciden en $\mathbb{R}$ (haciendo caso omiso de un posible polo), luego coinciden en todo $\widehat{\mathbb{C}}$ por el Teorema de la Identidad. Por lo tanto $T(\overline{z}) = \overline{T(z)}$.
(b) Aplicar la parte (a) a $T = T_2 T_1^{-1}$. $\square$

22.10. Este resultado justifica la siguiente definición, que no depende de la elección de T que se utilice.

Definición. Sea $K \in \mathcal{K}$. Se define la *reflexión* (o *inversión*) en K como

$$\rho_K = T^{-1} \circ \rho \circ T \colon \ \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

donde $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ es tal que $T(K) = \widehat{\mathbb{R}}$.

Nota. $\rho_{\widehat{\mathbb{R}}} = \rho$. Cuando $z \in K$, se tiene $\rho_K(z) = z$. Cada ρ_K es anticonforme; siempre $\rho_{K_2} \circ \rho_{K_1} \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$. Se dicen que los puntos $z, \rho_K(z)$ son *simétricos* en K.

Proposición. Si $z_1, z_2, z_3 \in K \in \mathcal{K}$, z_i distintos, entonces

$$\lambda(\rho_K(z), z_1, z_2, z_3) = \overline{\lambda(z, z_1, z_2, z_3)}, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

CLASIFICACIÓN DE $\operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$

22.11. Sea $T \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\mathrm{id}\}$. Sabemos que T no puede tener tres puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$. Las soluciones de la ecuación $(az+b)/(cz+d) = z$ son ceros de un polinomio cuadrático o lineal, por lo que el número de puntos fijos de T es 1 o 2 (nunca 0). Sea $\{p, q\} \in \widehat{\mathbb{C}}$ el conjunto de raíces de dicho cuadrático.

Supongamos primero que $p \neq q$. Sabemos que $T(\mathcal{K}_{p,q}) = \mathcal{K}_{p,q}$, $T(\mathcal{K}_{p,q}^{\perp}) = \mathcal{K}_{p,q}^{\perp}$. Tomamos $S \in \operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $S(p) = 0$, $S(q) = \infty$ (no es única). Entonces STS^{-1} fija $0, \infty$. Podemos escribir

$$STS^{-1}(z) = \mu z,$$

donde $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ se llama el *multiplicador* de T. Si se usara otra S no se obtendría otro μ. Pero si se intercambian p, q se obtiene μ^{-1} en lugar de μ. Así μ está "casi determinado" por T.

Caso 1. $\mu > 0$. T se llama *hiperbólica*. T deja invariante cada círculo en $\mathcal{K}_{p,q} = S^{-1}(\mathcal{K}_{0,\infty})$, e intercambia los círculos de $\mathcal{K}_{p,q}^{\perp} = S^{-1}(\mathcal{K}_{0,\infty}^{\perp})$.

Caso 2. $|\mu| = 1$. T se llama *elíptica*. T intercambia los círculos de $\mathcal{K}_{p,q} = S^{-1}(\mathcal{K}_{0,\infty})$ y deja invariante cada círculo en $\mathcal{K}_{p,q}^{\perp} = S^{-1}(\mathcal{K}_{0,\infty}^{\perp})$.

Caso 3. μ no cumple con los casos 1,2. T se llama *loxodrómica.*

Caso 4. $p = q$. T se llama *parabólica.* Se toma $S(p) = \infty$, y se encuentra $STS^{-1}(z) = z + \lambda$, $\lambda \neq 0$. Tomando S apropiadamente se pude suponer que $\lambda = 1$. Asi la colección de rectas horizontales, que están en $\mathcal{K}_\infty$, son enviadas por $T(z) = 1/z$ en una familia de círculos tangentes en p.

22.12. Para las transformaciones que tengan multiplicador (es decir, excluyendo las parabólicas y la identidad), tenemos $STS^{-1}(z) = (\sqrt{\mu}z + 0)/(0z + 1/\sqrt{\mu})$, es decir, se define con los coeficientes $a' = \sqrt{\mu}$, $b' = c' = 0$, $c' = 1/\sqrt{\mu}$ con $a'd' - b'c' = 1$. La traza de las matrices $\begin{pmatrix} a\, b \\ c\, d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a'\, b' \\ c'\, d' \end{pmatrix}$ para T, STS^{-1} son identicas, $\pm(a + d) = \pm(a' + d') = \pm(\sqrt{\mu} + 1/\sqrt{\mu})$.

USOS PRÁCTICOS

22.13. Sea $T(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$. Entonces como $|z - i| = |z + i|$ cuando $z \in \mathbb{R}$, sabemos que $T(\widehat{\mathbb{R}}) = \partial B_1(0)$. Esto podría verse tambień viendo las imágenes de sólo tres puntos, como $T(0) = -1, T(1) = -i, T(\infty) = 1$, todos en $\partial B_1(0)$. Como $T(i) = 0$ sabemos que el semiplano superior (un disco en $\widehat{\mathbb{C}}$) es enviado por T al *interior* $B_1(0)$ de $\partial B_1(0)$. Viendo en cambio adónde envía $\partial B_1(0)$: tenemos $T(1) = -i$, $T(-1) = i$, luego $T(\partial B_1(0))$ es un círculo en $\widehat{\mathbb{C}}$ que pasa por $\pm i$. Se podría ver cuál círculo es checando un tercer punto, o como alternativa: $\partial B_1(0)$ es ortogonal a $\widehat{\mathbb{R}}$, luego $T(\partial B_1(0))$ tiene que ser ortogonal a $T(\widehat{\mathbb{R}}) = \partial B_1(0)$. Esto significa que $T(\partial B_1(0)) = i\widehat{\mathbb{R}}$.

22.14. Dos elementos de $\mathcal{K}$ se llaman *tangentes* si se tocan en un solo punto. Así un par de rectas paralelas son tangentes en ∞. Si $T \in \mathrm{Aut}\ \widehat{\mathbb{C}}$, entonces las imágenes de círculos tangentes también son tangentes. Por ejemplo, sean $K_1 = \partial B_1(0)$, $K_2 = \partial B_{1/2}(1/2)$. La función $T(z) = 1/(z-1)$ envía el punto de tangencia 1 al ∞, luego $T(K_1), T(K_2)$ son rectas paralelas. Puesto que $T(\overline{z}) = \overline{T(z)}$, las imágenes son simétricas en $\widehat{\mathbb{R}}$ y tienen que ser rectas verticales. Calculando $T(-1)$, $T(0)$ se encuentran cuáles rectas. La región entre K_1, K_2 es enviada a la banda infinita entre $T(K_1), T(K_2)$ (es la única componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus (T(K_1) \cup T(K_2))$ que no es un disco).

22.15. El semidisco $\{z : |z| < 1, \ \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ es la intersección de dos discos en $\widehat{\mathbb{C}}$. Su frontera es formada por partes de $K_1 = \partial B_1(0)$ y $K_2 = \widehat{\mathbb{R}}$. Se intersectan en ± 1, y la transformación $T(z) = (z-1)/(z+1)$ envía estos puntos a $0, \infty$. Como K_1, K_2 son ortogonales, las rectas imagen son ortogonales. Por lo tanto son $\widehat{\mathbb{R}}$ y $i\widehat{\mathbb{R}}$. Calculando el punto imagen $T(i/2)$ se determina cuál cuadrante es la imagen.

EJERCICIOS

1. Encontrar condiciones en la traza $a + d$ para determinar el tipo de una transformación.

2. Si T es hiperbólica o loxodrómica y si $T(z) \neq z$, entonces la sucesión $\{T^n(z)\}$ converge a un punto fijo de T cuando $n \to \infty$, y al otro cuando $n \to -\infty$. ¿Qué pasa cuando T es parabólica?

3. Escribir diversos elementos de $\mathrm{Aut}\, \widehat{\mathbb{C}}$ y calcular sus composiciones, sus inversas, sus puntos fijos, sus multiplicadores (en su caso).

4. Escribir diversos elementos de $\mathcal{K}$ y encontrar elementos de $\mathrm{Aut}\, \widehat{\mathbb{C}}$ que envíen unos a otros. Calcular las inversiones en ellos.

5. Encontrar la colección de elementos de $\mathrm{Aut}\, \widehat{\mathbb{C}}$ que envían determinado disco a otro disco determinado.

6. Encontrar qué hacen las inversiones en elementos de $\mathcal{K}_{z_1,z_2}$ y $\mathcal{K}^{\perp}_{z_1,z_2}$ cuando se aplican a círculos en dichas clases.

7. Poder encontrar transformaciones específicas de un disco en un semidisco, un semidisco en un cuadrante, un cuadrante en un sector, un sector en una banda infinita entre paralelas. (No todos estas transformaciones son de Möbius, puede ser necesario componer con otras funciones elementales.)