VARIABLE COMPLEJA $\#17$

PRINCIPIO DEL MÁXIMO

17.1. Recordemos que cuando f es holomorfa y no-constante, es n-a-1 en alguna vecindad de z_0,

$$f(z) = a_0 + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

con $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Veamos otra forma de demostrar este hecho, usando el Principio del Argumento:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f'(z)}{f(z) - a_0}\, dz = n$$

con r tan pequeño que z_0 es el único punto de $B_{2r}(z_0)$ donde f toma el valor a_0. Consideremos la función

$$\varphi(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f'(z)}{f(z) - c}\, dz,$$

así que $\varphi(a_0) = n$ cuando $c \in B_r(z_0)$. Como f es continua, podemos tomar $\epsilon > 0$ tal que $|f(z) - a_0| > \epsilon$ cuando $z \in \partial B_r(z_0)$. El denominador del integrando no se anula para $|c - a_0| < \epsilon/2$. Luego φ es continua cerca de a_0. Pero por el Principio del Argumento $\varphi(c)$ es el número de veces que f toma el valor c dentro de $B_r(z_0)$, que es un entero y por tanto es n.

<u>Teorema.</u> (del Map Abierto) Toda función holomorfa y no constante es una función abierta.

Una simple consecuencia: si f es holomorfa y $|f|$ es constante, entonces f es constante.

17.2. <u>Definición.</u> Diremos que una función $f\colon D \to \mathbb{R}$ <u>satisface el Principio del Máximo</u> en D si o bien (i) f es constante, o bien (ii) f no toma ningún máximo en D. Una función $f\colon D \to \mathbb{C}$ <u>satisface el Principio del Máximo</u> cuando $|f|$ lo hace.

(No tomar un máximo no implica ser no-acotada.) (Para una función real-valuada, hay que tener claro si se entiende cómo tomando valores en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$.)

Teorema. (Principio del Máximo) Las funciones holomorfas satisfacen el Principio del Máximo.

Proposición. Las funciones armónicas ($\mathbb{R}$-valuadas) satisfacen el Principio del Máximo.

17.3. Definición. f satisface la Propiedad del Valor Medio en D si

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

cada vez que $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$.

Teorema. La Propiedad del Valor Medio implica el Principio del Máximo. Las funciones holomorfas y las funciones armónicas satisfacen la Propiedad del Valor Medio (y por lo tanto el Principio del Máximo—demostración alternativa).

17.4. Definición. $u\colon D \to \mathbb{R}$ es subarmónica si cuando $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$,

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Proposición. Las funciones subarmónicas satisfacen el Principio del Máximo.

Nota. Si f es continua en $\operatorname{cerr} D$ con D un dominio acotado, y si f satisface el Principio del Máximo, entonces f toma su máximo en ∂D. Otra forma de decirlo es que si $|f| \leq M$ en ∂D, entonces $|f| \leq M$ en D.

Nota. Si D no es acotado, es posible que f sea holomorfa y acotada en ∂D pero no en D.

17.5. Teorema. (de Darboux) Sea f holomorfa en D, sea $\gamma \subseteq D$ una curva de Jordan cuyo dominio interior D_γ esté contenido en D. Supóngase que $f|_\gamma$ es 1-a-1. Entonces f es una biyección de D_γ al dominio interior $D_{f(\gamma)}$ acotado por la curva de Jordan $f(\gamma)$. Así f es una transformación conforme entre estos dos dominios de Jordan.

Ejemplo. $w = \operatorname{sen} z$ en $D = \{|\operatorname{Re} z| < \pi/2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Con el Teorema de Darboux se muestra que sen es 1-a-1 en subrectángulos determinados por $\operatorname{Im} z < R$, luego se deduce que $\operatorname{sen}\colon D \to$ semiplano superior es una transformación biyectiva conforme.

Nota. Hay una "versión fuerte" del Teorema de Cauchy de la cual uno debe estar consciente: γ una curva de Jordan rectificable, con $f\colon D_\gamma \cup \gamma \to \mathbb{C}$ continua, $f|D_\gamma$ holomorfa. Entonces $\displaystyle\int_\gamma f\,dz = 0$. (Se omite la demostración.)

Hay una misma "versión fuerte" para la Fórmula Integral de Cauchy, el Teorema de los Residuos, el Principio del Argumento, el Teorema de Rouché, el Teorema de Darboux, etc., en que se permite que γ sea (o toque) la frontera de D.

VARIABLE COMPLEJA #18

CÁLCULO DE INTEGRALES REALES MEDIANTE RESIDUOS

A. Ejemplo. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$.

Como en todos los ejemplos, primero verificar que la integral existe, en este caso que $\int_{-\infty}^0$ y $\int_0^\infty$ son finitos. Luego usar el semicírculo superior γ_R de $\partial B_R(0)$, que junto con el intervalo $\sigma_R = [-R, R] \subseteq R$ encierra dos de los polos de $\dfrac{z^2}{1+z^4}$. Verificar que la integral sobre γ_R tiende a 0 cuando $R \to \infty$. Deducir por el T. de los Residuos que que

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Este método funciona para $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ donde P, Q son polinomios, $Q(x) \neq 0$ para $x \in \mathbb{R}$, grado $Q \geq$ grado $P + 2$.

B. Ejemplo. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+4}\,dx$.

Claramente $I = \operatorname{Im} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+4}\,dx$. Para estimar la integral sobre γ_R usar

<u>Lema.</u> Sea $|f(z)| \leq M$ para z en el semicírculo γ_R. Entonces

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{iz} f(z)\,dz \right| \leq \pi M.$$

Esto implica que la integral I es dada por el único residuo en el semiplano superior, as saber, en $z = 2i$, luego por el T. de los Residuos $I = e^{-2}\pi$.

C. <u>Ejemplo.</u> $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$, $0 < \alpha < 1$.

Considerar $f(z) = \dfrac{z^{\alpha-1}}{1+z}$ en $\partial B_{1/R}(0)$ y $\partial B_R(0)$. Verificar que $\displaystyle\int f \to 0$ en ambas circunferencias cuando $R \to \infty$. Notar que la potencia fraccionaria es diferente sobre $\sigma_R^+ + i\epsilon$ y $\sigma_R^+ - i\epsilon$, por lo que

$$\int_{(\sigma_R^+)-i\epsilon} f\,dz = e^{2\pi\alpha i} \int_{(\sigma_R^+)+i\epsilon} f\,dz$$

El único residuo dentro de $B_R(0)$ (excluyendo el espacio entre $\sigma_R^+ \pm i\epsilon$) es en $z = -1$. Conclusión: $I = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

D. <u>Ejemplo.</u> $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

Sea $f(z) = \dfrac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$. Cortar $B_R(0)$ por $\sigma_+^* = [1+1/R, R]$ y $\sigma_-^* = [-R, -1-1/R]$. Tomemos $f > 0$ en $\sigma_+^* + i\epsilon$, luego verificar $f < 0$ en $\sigma_+^* - i\epsilon$. Cerca de $z = 1$, $f(z) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{z-1}}$; en $z = -1$, $f(z) \approx \dfrac{1}{\sqrt{-2}\sqrt{z+1}}$.

El único residuo está en $z = 0$, y vale $-i$. La integral sobre $B_R(0)$ tiende a 0 y la suma de los residuos en $\sigma_\pm^* \pm i\epsilon$ (orientados a lo largo de la frontera del dominio) es $2\pi i(-i) = 2\pi$. Las cuatro integrales sobre los segmentos son iguales, luego $I = \pi/2$.

E. Ejemplo. $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta}\, d\theta$, $a > 1$.

$2I = \displaystyle\int_0^{2\pi}$. Poner $z = e^{i\theta}$, luego $dz = iz\,d\theta$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$.

$$2I = \int_{\partial B_1(0)} \frac{dz/(iz)}{a + \frac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)},$$

$$I = -i \int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

porque $\mathrm{Res}_p = \dfrac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$ donde $p = -a + \sqrt{a^2-1}$.

VARIABLE COMPLEJA $\#19$

EXTENSIÓN POR SIMETRÍA

19.1. Sea f definida en D. La reflexión de f en el eje $\mathbb{R}$ es $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ para z tal que $\overline{z} \in D$. Notemos que f y su reflexión son holomorfas simultáneamente.

Sea ahora $D^+ \subseteq P^+$, $D^- \subseteq P^-$ dominios tales que tengan un segmento común $\sigma \subseteq \partial D^+ \cap \partial D^- \subseteq \mathbb{R}$. Formamos un dominio $D = D^+ \cup \sigma \cup D^-$.

Sea D simétrico: $\overline{z} \in D$ cuando $z \in D$. En otras palabras, $D^- = \{\overline{z}\colon\ z \in D^+\}$. La primera consecuencia de la simetría es que si f es holomorfa en D, entonces la función $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ también es holomorfa en D. La segunda consecuencia es si f toma valores reales en σ, entonces $f = g$ (por el Teorema de la Identidad). La simétría $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ de f se expresa en la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - x_0)^k$$

cerca de x_0 real, con la propiedad de que todos los a_k sean reales.

19.2. Teorema. (Principio de la Reflexión) Sea f continua en $D^+ \cup \sigma$ y holomorfa en D^+, tal que $f(x) \in \mathbb{R}$ para $x \in \sigma$. Para $z \in D$ defínase

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \cup \sigma, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in D^-. \end{cases}$$

Entonces g es holomorfa en D.

En la práctica D no tiene que ser simétrico, sólo se aplica el Principio de la Reflexión a una vecindad simétrica de σ en D, donde $\sigma \subseteq \mathbb{R}$. (Comúnmente el dominio que se presenta en algún problema es lo que llamamos aquí D^+, que no es simétrico.)

Nota. Si $L \subseteq \mathbb{C}$ es cualquier recta, entonces hay una transformación lineal $T\colon L \to \mathbb{R}$, tiene la forma $T(z) = az + b$. La reflexión en L es

$$\rho_L(z) = T^{-1}(\overline{(T(z))}).$$

Si f está definida en un dominio cuya frontera contiene un segmento de L, y si f es real en este segmento, entonces se puede extender f por reflexión con la fórmula $z \mapsto \overline{f(\rho_L(z))}$.

Se puede hacer lo mismo si en lugar de ser f real en el segmento de frontera, que f lo envíe dentro de un segmento de alguna recta L'.

Todo lo anterior se generaliza de manera natural cuando σ y $f(\sigma)$ son arcos de círculo en lugar de segmentos.

OTROS ASPECTOS DEL PRINCIPIO DEL MÁXIMO

20.1. <u>Ejemplo.</u> Notemos que la función $f(z) = cz$ para $|c| = 1$, es holomorfa en $B_1(0)$ con $f(B_1(0)) \subseteq B_1(0)$. Satisface $|f(z)| = |z|$.

<u>Teorema.</u> (Lema de Schwarz) Sea $f\colon B_1(0) \to B_1(0)$ holomorfa con $f(0) = 0$. Entonces

(I) $(\forall z)$ $|f(z)| \le |z|$; además $|f'(0)| \le 1$.

(II) Si para algún $z_0 \ne 0$ se tiene $|f(z_0)| = |z_0|$, o bien si $|f'(0)| = 1$, entonces existe c tal que $|c| = 1$ y $(\forall z)$ $f(z) = cz$.

<u>Corolario.</u>

(I) Sea $f\colon B_1(0) \to B_1(0)$ holomorfa y biyectiva. Entonces existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que

$$f(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}.$$

(II) Sea $f\colon P^+ \to P^+$ holomorfa y biyectiva, donde

$$P^+ = \{\, \mathrm{Im}\ z > 0\}.$$

Entonces existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

20.2. <u>Teorema.</u> ("Convergencia uniforme, versión fuerte") Sea D un dominio acotado. Sean f_n continuas en $D \cup \partial D$, holomorfas en D. Supóngase que $\{f_n|_{\partial D}\}$ converge uniformemente. Entonces f_n converge uniformemente en D a una función holomorfa en D.

20.3. <u>Teorema.</u> (Phragmen-Lindelöf) Sea $f(z)$ continua en $\mathrm{Re}\, z \ge 0$, y holomorfa en $\mathrm{Re}\, z > 0$. Supóngase que $|f(iy)| \le 1$ para todo y, además $|f(z)| \le Ce^{|z|^\beta}$ para C, β fijos, donde $0 < \beta < 1$. Entonces $(\forall z)$ $|f(z)| \le 1$.

VARIABLE COMPLEJA #20

TEOREMAS GLOBALES

I. Funciones en $\mathbb{C}$.

20.1. Recordemos que una <u>función entera</u> es una función holomorfa definida en $\mathbb{C}$, y que su serie de Taylor centrado en cualquier punto converge en todo $\mathbb{C}$.

<u>Teorema.</u> (de Liouville). Toda función entera acotada es constante.

20.2. <u>Corolario.</u> Sea f entera; sea P un polinomio de grado N tal que $|f(z)| \leq |P(z)|$ cuando $|z|$ es lo suficientemente grande. Entonces f es un polinomio de grado menor o igual a N.

20.3. <u>Corolario.</u> Toda función entera inyectiva es de la forma $f(z) = az+b$ con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Para probarlo: <u>Lema.</u> Una función que es inyectiva en una vecindad perforada de un punto no tiene una singularidad esencial en ese punto.

II. Funciones en $\widehat{\mathbb{C}}$.

20.4. Cuando una función es holomorfa en una vecindad perforada $A_{R,\infty} = \{|z| > R\}$, del ∞, decimos que tiene una singularidad aislada en el ∞.
<u>Definición.</u> El tipo de singularidad de f en $z = \infty$ (removible, polo, esencial) es el tipo de singularidad de la función g, $g(t) = f(1/t)$ en el punto $t = 0$.

Cualquier función holomorfa definida en una vecindad perforada del ∞ tiene una <u>serie de Laurent centrada en el ∞</u>

$$f(z) = \cdots + a_{-n}z^n + \cdots + a_{-2}z^2 + a_{-1}z + a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots$$

y f es meromorfa en el ∞ cuando $a_n = 0$ para todo $n \leq N$. Tiene singularidad removible (es holomorfa) cuando $a_n = 0$ para $n \leq -1$. En tal caso su valor en el ∞ es $f(\infty) = a_0$. Si f tiene un polo en el ∞, entonces $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

20.5. Ejemplo. Sea R una función racional, $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ donde P, Q son polinomios y Q no es idénticamente cero. Entonces R es meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos solamente en los ceros de Q (tales que P no tenga un cero de mayor o igual grado).
Para analizar el comportamiento de R en ∞, se escribe

$$g(t) = R(\frac{1}{t}) = \frac{P(\frac{1}{t})}{Q(\frac{1}{t})}.$$

También g es una función racional, por lo cual es meromorfa en $t = 0$. Por la definición, R es meromorfa en $z = \infty$ (podría tener una singularidad removible).

Notemos que R tiene un polo / valor finito no-cero / cero en $z = \infty$ cuando el grado de P es mayor que / igual a / menor a el grado de Q.
Definición. El orden de la función racional R es el máximo de los grados de P,Q si P, Q no tienen ningún factor común.

20.6. Proposición.

(I) Toda función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ es una función racional.

(II) Toda función meromorfa biyectiva de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$ es de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$.

20.7. Residuos en el ∞. El haber usado $f(1/t)$ en $t = 0$ para describir la definición del comportamiento de $f(z)$ en $z = \infty$ es arbitrario, pues hay muchas otras funciones localmente 1-a-1 que envían 0 a ∞. (Por ejemplo $1/(2t)$, $1/(t^2 + t)$, $1/\operatorname{sen} t, \ldots$). Cualquiera de estas daría la misma noción del tipo de singularidad en el ∞. Pero ellas no dan la misma noción de residuo, es decir, $\mathrm{Res}_0 f(\mathrm{algo}(t))$ no siempre es lo mismo. Por eso esta expresión no puede usarse tal cual como definición de "residuo de f al infinito". Pero con $z = \psi(t)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=\psi(p)} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\psi(\partial B_\epsilon z_0)} f(z)\, dz = \int_{\partial B_\epsilon z_0)} f(\psi(t))\psi'(t)\, dt \\ = \mathrm{Res}_{t=p} f(\psi(t))\psi'(t).\end{aligned}$$

Para ver en lo abstracto lo que pasa:
Sea $\psi_1 \colon B_\epsilon(p_1) \to$ (vec. de ∞), $\psi_2 \colon B_\epsilon(p_2) \to$ (vec. de ∞), ambas funciones holomorfas inyectivas, con $\psi_1(p_1) = \psi_2(p_2) = \infty$. Pongamos $g_1 = f \circ \psi_1$, $g_2 = f \circ \psi_2$, que son funciones definidas cerca de p_1, p_2, respectivamente, y que en algún sentido "representan" a f. Podemos decir que g_1, g_2 "difieren" por $\varphi = \psi_1^{-1} \circ \psi_2$, así los datos se conectan por $g_2 = g_1 \circ \varphi$ y $\varphi(p_2) = p_1$. Sea γ una pequeña curva que da una vuelta alrededor de p_2. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(\gamma)} g_1(t)\, \psi_1'(t)\, dt &= \int_{\varphi(\gamma)} f(\psi_1(t))\, \psi_1'(t)\, dt \\
&= \int_\gamma f(\psi_1(\varphi(s)))\, \psi_1'(\varphi(s))\, \varphi'(s)\, ds \\
&= \int_\gamma f(\psi_2(s))\, \psi_2'(s)\, ds \\
&= \int_{\varphi(\gamma)} g_2(s)\, \psi_2'(s)\, ds
\end{aligned}$$

(ya comentamos que en general $\int_{\varphi(\gamma)} g_1(t)\, dt \neq \int_\gamma g_2(s)\, ds$).

Definición. El residuo al ∞ de una función f holomorfa en una vecindad perforada del ∞ es

$$\mathrm{Res}_\infty f = \mathrm{Res}_{t=0}\left(\frac{-1}{t^2}\right) f\left(\frac{1}{t}\right).$$

(Esto es igual a $\mathrm{Res}_{t=p_1} \psi'(t) f(\psi(t))$ del caso particular $\psi(t) = 1/t$, $p_1 = 0$.)

20.8. Con f holomorfa en $A_{R,\infty}$ y con $R' > R$, la definición da

$$2\pi i\, \mathrm{Res}_\infty f = \int_{\partial B_{1/R'}(0)} \frac{-1}{t^2}\, f\left(\frac{1}{t}\right) dt = -\int_{\partial B_{R'}(0)} f(z)\, dz$$

porque la relación $t \mapsto z = 1/t$ invierte la orientación de la circunferencia, y $dz = (-1/t^2) dt$.

Proposición. Sea R una función racional. Entonces

$$\sum_{z \in \widehat{\mathbb{C}}} \mathrm{Res}_z R = 0.$$

(Esta sumatoria es realmente sobre $\{$polos de $R\} \cup \{\infty\}$, luego es una suma finita.)