

SINGULARIDADES

- 13.1. Nos interesan las singularidades aisladas de las funciones holomorfas. Es útil también considerar anillos

$$A_{R_1, R_2}(z_0) = \{z: R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

para luego tomar el caso particular $R_1 = 0$ (o tomar el límite $R_1 \rightarrow 0$).

SERIES DE LAURENT

- 13.2. Sea f holomorfa en $A_{R_1, R_2}(0)$. Para cualquier $z \in A_{R_1, R_2}(0)$ podemos tomar r_1, r_2 tales que $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$, así

$$z \in \overline{A_{r_1, r_2}(0)} \subseteq A_{R_1, R_2}(0).$$

La frontera $\partial A_{r_1, r_2}(0)$ se forma de dos circunferencias; se pueden juntar con un par de segmentos radiales cercanos, para obtener una curva cerrada que es homotópica a una circunferencia pequeña $\partial B_\epsilon(z)$ en $A_{R_1, R_2}(0) - \{z\}$. Por la Fórmula Integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_2}(0)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}(0)} \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= f^+(z) + f^-(z). \end{aligned}$$

(Si f fuera holomorfa en todo $B_{R_2}(0)$, entonces tendríamos $f^- = 0$ mientras $f^+ = f$.) Expansión en series:

$$\begin{aligned} 2\pi i f^+(z) &= \int_{\partial B_{r_2}(0)} \frac{f(w)}{w - z} dw \stackrel{|w| \geq |z|}{=} \int_{\partial B_{r_2}(0)} \frac{f(w)}{w} \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} dw \\ &= \int_{\partial B_{r_2}(0)} f(w) \sum_0^\infty \frac{z^k}{w^{k+1}} dw \stackrel{\text{unif}}{=} \sum_0^\infty \left(\int_{\partial B_{r_2}(0)} \frac{f(w) dw}{w^{k+1}} \right) z^k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\pi i f^-(z) &= - \int_{\partial B_{r_1}(0)} \frac{f(w)}{w - z} dw \stackrel{|w| \leq |z|}{=} \int_{\partial B_{r_1}(0)} \frac{f(w)}{z} \frac{1}{1 - \frac{w}{z}} dw \\ &= \int_{\partial B_{r_1}(0)} f(w) \sum_0^\infty \frac{w^k}{z^{k+1}} dw \stackrel{\text{unif}}{=} \sum_0^\infty \left(\int_{\partial B_{r_1}(0)} f(w) w^k \right) \frac{1}{z^{k+1}}. \end{aligned}$$

Por eso definimos

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ (el valor preciso de r no importa). Entonces

$$f^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad f^-(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k$$

Se verifica que para $k \geq 0$, $|a_k| \leq C/R_2^k$, mientras que para $k < 0$, $|a_{-k}| \leq C/R_1^k$. Así $\sum_0^{\infty} a_k z^k$ converge para $|z| < R_2$, y $\sum_1^{\infty} a_k t^k$ converge para $|t| < R_1$. Nótemos que $\sum_{-\infty}^{-1} a_k z^k$ es una serie de potencias aplicada a $1/z$ y por tanto converge para $|z| > R_1$.

Proposición. Si f es holomorfa en $A_{R_1, R_2}(z_0)$, entonces existen coeficientes $a_k \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ para todo $z \in A_{R_1, R_2}(z_0)$.

Esta serie se llama la serie de Laurent para f centrada en el punto z_0 (o más precisamente, en el anillo $A_{R_1, R_2}(z_0)$).

Ejercicio. Los coeficientes de la serie de Laurent son únicos: si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$ para todo $z \in A_{R_1, R_2}(z_0)$, entonces $a_k = b_k$ para todo k .

SINGULARIDADES REMOVIBLES

13.3. Sea f holomorfa en $A_{0, r}(z_0) = B_r(z_0) - \{z_0\}$. Entonces tenemos para $0 < r' < r$,

$$\left| \int_{\partial B_{r'}(z_0)} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial B_{\epsilon}(z_0)} f(z) dz \right| \leq (2\pi\epsilon) \sup_{|z-z_0|=\epsilon} |f|$$

cuando $0 < \epsilon < r'$. Este sup podría tender al ∞ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Para evitarlo, podremos agregar una hipótesis como $|f| \leq M$. Con esto

$$\int_{\partial B_{r'}(z_0)} f(z) dz = 0$$

para todo r' , i.e., el residuo es cero. Como consecuencia, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para curvas cerradas $\gamma \subseteq B_r(z_0)$ (aún sin las hipótesis del T. de Cauchy). De esto podemos definir $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw$ y obtener $F' = f$. Esto nos permite definir una función $\tilde{f}$ en todo $B_r(z_0)$ mediante

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0, \\ F'(z_0), & z = z_0, \end{cases}$$

que es holomorfa y extiende f , es decir, $\tilde{f}|_{A_{0,r}(z_0)} = f$.

Teorema. (de Riemann sobre las Singularidades Removibles) Sea f holomorfa en $A_{0,r}(z_0)$. Supóngase que $|z - z_0||f(z)| \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow z_0$ (es decir, $f(z) = o(\frac{1}{|z - z_0|})$). Entonces la singularidad de f en z_0 es removible. (Es decir, f es restricción de una función holomorfa en $B_r(z_0)$.)

La demostración de arriba requería completar unas technicalidades para asegurar que F realmente está definida en z_0 .

Demostración. (2) Mostrar, con un sencillo estimado, que para $k \geq 0$, se tiene $\oint f(z)(z - z_0)^k dz = 0$. Entonces la serie de Laurent $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ tiene $a_k = 0$ para $k < 0$, o sea $f = f^+$. $\square$

Demostración. (3) Sea

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z), & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Entonces g es continua, y con bastante trabajo, se demuestra que $\int_{\gamma} g dz = 0$. Luego por el Teorema de Morera g es holomorfa, se puede expresar $g(z) = \sum_1^{\infty} b_k(z - z_0)^k$. Así $f(z) = \sum_0^{\infty} b_{k+1}(z - z_0)^k$ y f tiene una extensión holomorfa, $f(z_0) = b_1 = g'(z_0)$. $\square$

Demostración. (4) Sea

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Entonces

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = (z - z_0)f(z) \rightarrow 0$$

cuando $z \rightarrow z_0$. Por lo tanto $g'(z_0)$ existe. Por el Teorema de Goursat, g es holomorfa en $B_r(z_0)$, con $g(z_0) = g'(z_0) = 0$. Se puede expresar $g(z) = \sum_2^\infty b_k(z - z_0)^k$. Así $f(z) = \sum_0^\infty b_{k+2}(z - z_0)^k$ y f tiene una extensión holomorfa, $f(z_0) = b_2 = (1/2)g''(z_0)$. $\square$

Ejemplo. Habiendo demostrado de alguna manera que $\frac{\operatorname{sen} z}{z} \rightarrow 1$ cuando $z \rightarrow 0$, sabemos que la singularidad en $z = 0$ es removible.

- 13.4. El Teorema de las Singularidades Removibles generalmente se usa con un hipótesis más fuerte, “si f es acotada cerca de z_0 , entonces z_0 es una singularidad removible” o aún más fuerte, “si f tiene un límite en z_0 , entonces z_0 es una singularidad removible”.

FUNCIONES MEROMORFAS

- 13.5. Definición. Una singularidad aislada z_0 de una función holomorfa f se llama un polo de f si $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow z_0$. Se dice que f es meromorfa en el dominio D si existe un subconjunto $E \subseteq D$ de puntos aislados de D tal que f es holomorfa en $D - E$ y f tiene un polo en cada punto de E . (“Todas las singularidades de f son polos (o removibles).”) Cuando z es un polo de f se escribe $f(z) = \infty$. (Con esto, se considera que f está “definida” en todos los puntos de D .)

Ejemplo. Para $z_n = i/n$, tenemos $|e^{1/z_n}| = 1 \not\rightarrow \infty$. Por lo tanto $f(z) = e^{1/z}$ no tiene un polo en $z = 0$. Eso a pesar del hecho de que para $z'_n = 1/n$, se tenga $|f(z'_n)| \rightarrow \infty$.

- 13.6. Definición. La esfera de Riemann es el conjunto $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Una vecindad en $\widehat{\mathbb{C}}$ del punto ∞ es cualquier conjunto que contenga un conjunto de la forma $\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Decimos que $z_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ cuando $(\forall R > 0)(\exists N)(\forall n \geq N) |z_n| > R$ ó $z_n = \infty$.

Ejemplo. Sea $ad - bc \neq 0$. Entonces la función $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ es un homeomorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$ a $\widehat{\mathbb{C}}$.

- 13.7. Definición. Sea D un dominio en $\widehat{\mathbb{C}}$. Sea $\infty \in D$. Decimos que f es holomorfa en ∞ si la función $t \mapsto f(1/t)$ es holomorfa en una vecindad $t = 0$. Similar para “meromorfa” en lugar de “holomorfa”.

Proposición. $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto.

- 13.8. Cuando f tiene un polo en z_0 , su recíproco $1/f$ tiende a cero en z_0 . Por el Teorema de Riemann, $1/f$ tiene una singularidad removible en z_0 , y vale cero ahí.

Definición. El orden de un polo z_0 de f es el orden del cero de $1/f$ en z_0 .

El orden del polo puede calcularse como

$$\min\{m: (z - z_0)^m f(z) \text{ tiene una singularidad removible en } z_0\}.$$

Proposición. La serie de Laurent en un polo de una función meromorfa tiene un número finito de coeficientes no-cero con índice negativo:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

donde m es el orden del polo de f en z_0 .

Proposición. Sea z_0 un polo de f de orden m . Entonces hay una vecindad V de z_0 tal que f es m -a-1 en $V \setminus \{z_0\}$. Para cada w_0 con $w_0 > R$ (grande) hay exactamente m soluciones de la ecuación $f(z) = w_0$ en $V \setminus \{z_0\}$.
(Esto se obtiene de las propiedades correspondientes de $1/f$.)

Nota. Los polos de una función meromorfa son puntos aislados.

SINGULARIDADES ESENCIALES

- 13.9. Definición. Una singularidad aislada de una función holomorfa se llama una singularidad esencial cuando no es removible y no es un polo.

Removible	Polo	Esencial
$\sum_0^{\infty}$	$\sum_{-N}^{\infty}$	$\sum_{-\infty}^{\infty}$
tiene límite en $\mathbb{C}$	límite= ∞	ni límite, ni acotada

13.10. Teorema. (Casorati-Weierstrass) Sea z_0 una singularidad esencial de la función holomorfa f . Sea $c \in \mathbb{C}$ arbitrario. Entonces cada vecindad de z_0 contiene una sucesión cuya imagen bajo f converge a c . (La imagen de toda vecindad perforada de una singularidad esencial es densa en $\mathbb{C}$.)

Un resultado más fuerte:

Teorema. (grande de Picard) Sea z_0 una singularidad esencial de la función holomorfa f . Entonces

$(\exists a) (\forall c \in \mathbb{C} - \{a\}) (\forall r > 0) (\exists z \in A_{0,r}(z_0)) f(z) = c$.

Demostración. (se omite)

VARIABLE COMPLEJA #14

RESIDUOS

14.1. Recordemos que

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(w) dw = a_{-1}$$

donde $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$.

Nota. Si z_0 es una singularidad removible de f , entonces $\operatorname{Res}_{z_0} f = 0$, pero ¡no recíprocamente!

14.2. Proposición. Sea f con un polo de orden 1 en z_0 . Entonces

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Ejemplo. $\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} = g(z_0)$ si g es holomorfa.

Ejemplo. Sea $a \neq 0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_a \frac{1}{z^2 - a^2} &= \operatorname{Res}_a \frac{1}{(z - a)(z + a)} = \frac{1}{2a}; \\ \operatorname{Res}_a \frac{1}{z^3 - a^3} &= \operatorname{Res}_a \frac{1}{(z - a)(z^2 + az + a^2)} = \frac{1}{3a^2}; \\ \operatorname{Res}_a \frac{1}{z^4 - a^4} &= \operatorname{Res}_a \frac{1}{(z - a)(z + a)(z^2 + a^2)} = \frac{1}{4a^3}; \\ \operatorname{Res}_a \frac{1}{h(z) - h(a)} &= \operatorname{Res}_a \frac{1}{(z - a) \frac{h(z) - h(a)}{z - a}} = \frac{1}{h'(a)} \text{ si } h'(a) \neq 0.\end{aligned}$$

Proposición. Sean g, h holomorfas; sea z_0 un cero simple de h ; sea $g(z_0) \neq 0$. Entonces

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{g}{h} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

14.3. Representación de funciones racionales en fracciones parciales.

Ejemplo: encontrar las constantes A, B, C en

$$\frac{1}{z(z^2 - 4z + 8)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2 - 4z + 8}.$$

En $z = 0$ sabemos que

$$\operatorname{Res}_0 \frac{1}{z(z^2 - 4z + 8)} = \left. \frac{1}{(z^2 - 4z + 8)} \right|_{z=0} = \frac{1}{8},$$

$$\operatorname{Res}_0 \frac{A}{z} = A, \quad \operatorname{Res}_0 \frac{Bz + C}{z^2 - 4z + 8} = 0,$$

luego $A = 1/8$. Para encontrar B, C ,

$$\frac{Bz + C}{z^2 - 4z + 8} = \frac{1}{z(z^2 - 4z + 8)} - \frac{1}{8z} = \frac{-z^2 + 4z}{8z(z^2 - 4z + 8)},$$

o sea $8z(Bz + C) = -z^2 + 4z$. De esto se despejan B, C inmediatamente.

Como alternativa, ya conociendo A y poniendo $z^2 - 4z + 8 = (z - \alpha)(z - \beta)$, tenemos los residuos

$$\operatorname{Res}_\alpha \frac{Bz + C}{z^2 - 4z + 8} = \frac{B\alpha + C}{\alpha - \beta}, \quad \operatorname{Res}_\beta \frac{Bz + C}{z^2 - 4z + 8} = \frac{B\beta + C}{\beta - \alpha}, \text{ etc.,}$$

y

$$\frac{1}{z^2 - 4z + 8} = \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{\text{Res}_\alpha}{z - \alpha} + \frac{\text{Res}_\beta}{z - \beta},$$

luego con $\alpha\beta = 8$, $\alpha + \beta = 4$ se llega al mismo resultado para B, C .

14.4. Proposición. Para calcular residuos en polos de mayor orden. Sea

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

con $a_{-n} \neq 0$. La siguiente función es holomorfa,

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \cdots + \underline{a_{-1}}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + \cdots$$

y queremos despejar el coeficiente de $(z - z_0)^{n-1}$, que es

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \right|_{z=a} ((z - z_0)^n f(z))$$

donde $\text{ord}_{z_0} f = -n$.

Ejemplo. $f(z) = \frac{1}{(z^2 - a^2)^3}$ tiene un polo de orden 3 en $z = a$. Por lo tanto

$$\text{Res}_a f = \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z+a)^3} \right) = \frac{1}{2} \frac{12}{(z+a)^5} \Big|_a = \frac{6}{(2a)^5} = \frac{3}{16a^5}.$$

14.5. Definición. Una curva de Jordan es una curva simple y cerrada. (No tiene que ser rectificable.)

Teorema. (de la Curva de Jordan) Sea $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ una curva de Jordan. Entonces el complemento $\mathbb{C} - \gamma$ tiene exactamente dos componentes conexos, que son un dominio acotado y un dominio no-acotado (llamadas la región interior y la región exterior a γ). La región interior es simplemente conexa. (Se omite la demostración.)

Definición. D es un dominio de Jordan cuando su frontera ∂D es una curva de Jordan y D es la región interior de esta curva.

Nota. No todo dominio simplemente conexo y acotado es un dominio de Jordan.

Unas versiones más del Teorema de Cauchy:

Proposición. Sea D un dominio de Jordan; sea $\gamma \subseteq D$ una curva cerrada. Sea f holomorfa en D . Entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Proposición. Sea D cualquier dominio en $\mathbb{C}$; sea f holomorfa en D ; sea γ una curva de Jordan (rectificable) en D tal que la región interior de γ está contenida en D . Entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

14.6. Teorema. (de los Residuos) Sea γ una curva simple y cerrada (suave por pedazos). Sea f una función meromorfa en un dominio que contiene tanto a γ como a la región interior de γ , con ningún polo de f sobre γ . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z \text{ dentro} \\ \text{de } \gamma}} \text{Res}_z f.$$

Nota. La sumatoria es efectivamente sobre un conjunto finito, de los polos de f dentro de γ , pues en los demás puntos se tiene $\text{Res}_z f = 0$.

Nota. Se puede cambiar la hipótesis “meromorfa” en “holomorfa salvo por singularidades aisladas”. Veremos la demostración más adelante.

14.7. Proposición. $\text{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = \text{ord}_{z_0} f$. (Residuo de la derivada logarítmica)

Teorema. (Principio del Argumento) Sea f meromorfa en D . Sea γ una curva de Jordan en D con su región interior también en D , y que no pase por polos o ceros de f . Contemos los ceros y polos de f según sus multiplicidades. Entonces

$$\begin{aligned} & \#\{\text{ceros de } f \text{ dentro de } \gamma\} - \#\{\text{polos de } f \text{ dentro de } \gamma\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

14.8. Nota. Cuando $n = \text{ord}_{z_0} f$, tenemos

$$\text{Res}_{z_0} \frac{zf'(z)}{f(z)} = nz_0, \quad \text{Res}_{z_0} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} = nz_0^2,$$

etc. El mismo razonamiento de la demostración del Principio del Argumento da

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \sum \left(\begin{smallmatrix} \text{ceros den-} \\ \text{tro de } \gamma \end{smallmatrix} \right) - \sum \left(\begin{smallmatrix} \text{polos den-} \\ \text{tro de } \gamma \end{smallmatrix} \right),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} dz = \sum \left(\begin{smallmatrix} \text{cuadrados} \\ \text{de ceros} \end{smallmatrix} \right) - \sum \left(\begin{smallmatrix} \text{cuadrados} \\ \text{de polos} \end{smallmatrix} \right),$$

etc.

ÍNDICE (Winding Number)

14.9. Dada una curva (continua) $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$, describiremos la variación neta de $\arg \gamma(t)$ cuando t varía de a a b . Observemos que no se vale escribir simplemente “ $\arg \gamma(b) - \arg \gamma(a)$ ” por la ambigüedad del argumento módulo 2π . Puesto que γ mantiene una distancia positiva ϵ del origen y es uniformemente continua, hay una partición

$$a, a + \delta, a + 2\delta, \dots, b$$

tal que $\gamma([a+k\delta, a+(k+1)\delta])$ está dentro de un sector de ángulo menor que $2\pi/3$. Luego el cambio neto de $\arg \gamma(t)$ en $[a+k\delta, a+(k+1)\delta]$ es

$$\arg \gamma(a + (k+1)\delta) - \arg \gamma(a + k\delta)$$

que tiene un valor único con la condición de que su valor absoluto es $< 2\pi/3$. El cambio neto de $\arg \gamma(t)$ en $[a, b]$ es la suma de éstos. Si se reduce el valor de δ este cambio neto queda igual. Esto no requiere que γ sea suave.

Para γ suave, se puede describir como sigue. Cubrimos γ con discos sucesivos que no toquen el origen. Cada disco es simplemente conexo, hay una rama holomorfa de $\log z = \log |z| + i \arg z$. Entonces

$$\int_{\gamma(t_k)}^{\gamma(t_{k+1})} \frac{dz}{z} = \log z \Big|_{\gamma(t_k)}^{\gamma(t_{k+1})} = \log \frac{|\gamma(t_{k+1})|}{|\gamma(t_k)|} - i (\arg \gamma(t_{k+1}) - \arg \gamma(t_k))$$

(si se usara otra rama de $\log z$, la discrepancia de una constante se cancelaría y se obtendría el mismo resultado.)

14.10. Definición. Sea $p \in \mathbb{C}$. Sea γ una curva cerrada (suave por pedazos) en $\mathbb{C} - \{p\}$. Entonces el índice de γ alrededor de p es

$$n(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - p}.$$

Proposición.

- (I) $n(\gamma, p) \in \mathbb{Z}$.
- (II) Si p, q están en la misma componente conexa de $\mathbb{C} - \gamma$, entonces $n(\gamma, p) = n(\gamma, q)$.
- (III) Si p está en la componente no acotada de $\mathbb{C} - \gamma$, entonces $n(\gamma, p) = 0$.

14.11. Supóngase que f es holomorfa. Escribiendo $w = f(z)$,

$$\#\{\text{ceros}\} \stackrel{\text{P.A.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\gamma)} \frac{dw}{w} = n(f(\gamma), 0).$$

Por eso la imagen $f(\gamma)$ tiene información sobre los ceros de f . Esta interpretación en términos de índice es la razón por que se llama Principio del “Argumento”.

Ejemplo. ¿Cuántas veces se anula el polinomio $P(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$ en el primer cuadrante $\{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$?

14.12. Teorema. (Fundamental del Álgebra) Sea $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Entonces la ecuación $P(z) = 0$ tiene exactamente n soluciones en $\mathbb{C}$, contadas con sus multiplicidades.

(“Multiplicidad” significa que si $P(z) - c$ tiene un cero de orden m , entonces dicho cero cuenta como m soluciones de la ecuación $P(z) = c$.)

14.13. Teorema. (de Rouché) Sean f, g meromorfas en D . Sea $\gamma \subseteq D$ una curva simple y cerrada que no pasa por polos de f o de g , tal que el dominio D_γ que encierra esté contenido en D . Supóngase que

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

para cada $z \in \gamma$. (Esto implica que γ no pasa por ceros de f o de g .) Entonces

$$\begin{aligned} & \#\{\text{ceros de } f \text{ dentro de } \gamma\} - \#\{\text{polos de } f \text{ dentro de } \gamma\} \\ &= \#\{\text{ceros de } g \text{ dentro de } \gamma\} - \#\{\text{polos de } g \text{ dentro de } \gamma\} \end{aligned}$$

VARIABLE COMPLEJA #15

HOMOLOGÍA

15.1. Se escribe $\gamma \simeq 0$ para indicar que γ es homotópica a un punto como lazo en D .

Definición. $\gamma \sim 0$ en D (γ es homóloga a cero en D) significa $(\forall a \notin D) n(\gamma, a) = 0$.

Recordemos que si a, a' están en la misma componente conexa de $\mathbb{C} - \gamma$, entonces $n(\gamma, a) = n(\gamma, a')$.

Proposición. $\gamma \simeq 0$ en $D \implies \gamma \sim 0$ en D .

Nota. $\gamma \sim 0$ en $D \not\implies \gamma \simeq 0$ en D .

15.2. Lema. Sea $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ una curva cerrada, Δ un disco de tal suerte que $\gamma \cap \Delta$ sea el diámetro vertical de Δ , trazado por γ t^+ veces en la dirección de abajo hacia arriba, t^- veces de arriba hacia abajo. Sea $t = t^+ - t^-$. Tómense puntos $a, a' \in \Delta - \gamma$, con a a la izquierda y a' a la derecha del diámetro. Entonces

$$n(\gamma, a) = n(\gamma, a') + t.$$

Teorema. (de Cauchy para homología) Sea f holomorfa en D y sea $\gamma \sim 0$ en D . Entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Teorema. (Formula Integral de Cauchy para homología) Sea f holomorfa en D , sea $\gamma \subseteq D$ una curva cerrada que no pasa por $z_0 \in D$. Sea $\gamma \sim 0$ en D . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = n(\gamma, z_0) f(z_0).$$

15.3. El Teorema de Cauchy también se aplica a ciclos que son sumas formales $\sum_1^N n_i \gamma_i$ donde las γ_i son curvas cerradas, y donde se definen

$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_1^N n_i \int_{\gamma_i} f(z) dz$ y $n(\gamma, p) = \sum_1^N n_i n(\gamma_i, p)$. Cuando algunas de estas curvas son idénticas, se puede indicarlo con coeficientes, $\gamma = \sum n_i \gamma_i$, luego $n(\gamma, p) = \sum_1^N n_i n(\gamma_i, p)$.

Corolario. (del T. de Cauchy para homología) Supóngase que

$(\forall a \notin D) \ n(\gamma_1, a) = n(\gamma_2, a)$. Sea f holomorfa en D . Entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

15.4. Teorema. (de los Residuos para homología) Sea f holomorfa salvo por singularidades aisladas en D . Sea $\gamma \subseteq D$ que no pase por ninguna singularidad de f . Sea $\gamma \sim 0$ en D . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in D} n(\gamma, z) \operatorname{Res}_z f.$$

15.5. Teorema. (Principio del Argumento para homología) Sea f meromorfa en D . Sea $\gamma \subseteq D$ que no pase por ceros ni polos de f . Sea $\gamma \sim 0$ en D . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{z \text{ un} \\ \text{cero} \\ \text{de } f}} n(\gamma, z) - \sum_{\substack{z \text{ un} \\ \text{polo} \\ \text{de } f}} n(\gamma, z)$$

donde se cuentan los ceros y polos según multiplicidades. Esto significa que cuando z es un cero de orden m , tiene que sumarse m veces el término correspondiente. Si se cuentan los ceros y polos una sola vez,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{z \text{ un} \\ \text{cero} \\ \text{de } f}} n(\gamma, z) \operatorname{ord}_z f - \sum_{\substack{z \text{ un} \\ \text{polo} \\ \text{de } f}} n(\gamma, z) (-\operatorname{ord}_z f).$$