TEOREMAS DE CAUCHY

(Las curvas mencionadas siempre van a ser diferenciables por pedazos.)

10.1. Sea f holomorfa en D y consideremos un rectángulo $[a, b] \times [c, d] \subseteq D$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\partial([a,b] \times [c,d])} f(z) dz &= \int (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int (u dx - v dy) + i \int (v dx + u dy) \end{aligned}$$

En la parte real, aplicamos el Teorema de Green con

$$u = P, \quad -v = Q, \quad \text{luego } Q_x - P_y = (-v_x) - u_y \stackrel{\text{C-R}}{=} 0.$$

En la parte imaginaria, aplicamos el Teorema de Green con

$$v = P, \quad u = Q, \quad \text{luego } Q_x - P_y = u_x - v_y \stackrel{\text{C-R}}{=} 0.$$

Por lo tanto $\int_{\partial([a,b] \times [c,d])} f(z) dz = 0$.

Terminología: Una “versión típica del Teorema de Cauchy” (o “Teorema de la Integral de Cauchy”) es una proposición de la siguiente forma. Hipótesis: D es un dominio, f es holomorfa en D , $\gamma \subseteq D$ es una curva cerrada, además condiciones en γ y/o en D .

Conclusión: $\int_{\gamma} f dz = 0$.

Arriba demostramos una versión del Teorema de Cauchy en la que γ es el perímetro de un rectángulo y el rectángulo (con su interior) está contenido en D .

10.2. Proposición. f holomorfa en $B_R(z_0)$. Entonces f tiene una primitiva en $B_R(z_0)$.

Demostración. Para $z \in B_R(z_0)$ definimos

$$\gamma_z(t) = \begin{cases} z_0 + 2t i \operatorname{Im}(z - z_0), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ z_0 + (2t - 1) \operatorname{Re}(z - z_0) + i \operatorname{Im}(z - z_0), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta.$$

Notemos que γ es la mitad (dos aristas) del perímetro de un rectángulo. Así por construcción, $F_x = f$. Sea γ_z^* la curva que traza la otra mitad del rectángulo con vértices en z_0, z . Por el Teorema de Cauchy para el rectángulo tenemos $\int_{\gamma_z} f dz - \int_{\gamma_z^*} f dz = 0$, luego

$$F(z) = \int_{\gamma_z^*} f(\zeta) d\zeta$$

Por eso, $F_y = -if$. La conclusión es que $F_y = -iF_x$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann) y así F es complejo-diferenciable, y $F' = f$. Puesto que la derivada de F es continua, F es de clase C^1 . Por lo tanto F es holomorfa y así es una primitiva de f . $\square$

Un resultado similar se tiene cuando en lugar de un disco $B_R(z_0)$ se utiliza un rectángulo, una elipse y muchas otras cosas. ¡Pero no se tiene para un anillo! La función holomorfa $f(z) = 1/z$ no tiene una primitiva en el anillo $1/2 < |z| < 2$ o en el disco perforado $B_1(0) - \{0\}$.

Nota. Por razones similares, la función armónica $u(z) = \log |z|$ no tiene un conjugado armónico en $B_1(0) - \{0\}$.

10.3. Teorema. (de Cauchy para un disco). Sea f holomorfa en $B_R(z_0)$.

Sea $\gamma \subseteq B_R(z_0)$ una curva cerrada. Entonces $\int_{\gamma} f dz = 0$.

10.4. Por otra parte, si supiéramos que $\int_{\gamma} f dz = 0$ para todas las curvas cerradas γ en el disco D , entonces la integral

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

estaría bien definida pues no dependería de la curva de z_0 a z . (O bien si lo supiéramos sólo para los perímetros de todos los rectángulos en D , definiríamos $F(z)$ como $\int_{\gamma_z} f dz = \int_{\gamma_z^*} f dz$.) Sabemos deducir $F' = f$. Si supiéramos “ F holomorfa $\implies F'$ holomorfa entonces podríamos deducir que f es holomorfa (T. de Morera, recíproco del T. de Cauchy, más adelante).

10.5. También mirando hacia adelante: cuando el dominio de f (holomorfa) es $D = D' - \{z_0\}$ decimos que z_0 es una singularidad aislada de f . Si es posible extender f a una función holomorfa en D (escogiendo el valor para $f(z_0)$), decimos que la singularidad aislada es removible. La función $f(z) = 1/z$ tiene una singularidad no removible en $z = 0$.

Para estudiar las singularidades aisladas, examinaremos $\int_{\partial B_R(z_0)} f dz$. Para f holomorfa, esta integral no depende de R (pequeño):

$$\int_{\partial B_R(z_0)} f dz = \int_{\partial B_r(z_0)} f dz$$

Se puede probar esto con el Teorema de Cauchy para un disco, mostrando primero que $\int_{\partial B_R(z_0)} f dz$ es igual a $\int_{\gamma} f dz$ donde γ se obtiene modificando $\partial B_R(z_0)$ de la siguiente forma: traza un arco grande de $\partial B_R(z_0)$, luego una parte pequeña de un radio hacia adentro, luego un arco pequeño de $\partial B_{R-\epsilon}(z_0)$, luego cerrando con parte de otro radio. La diferencia entre $\partial B_R(z_0)$ y γ *está contenido en un disco donde f es holomorfa*; por el Teorema de Cauchy para un disco la integral es cero. Se sigue de esto que las integrales sobre $\partial B_R(z_0)$ y γ coinciden. Se repite el argumento modificando la curva de integración poco a poco para llegar a mostrar mostrar que $\int_{\partial B_R(z_0)} f dz = \int_{\partial B_{R-\epsilon}(z_0)} f dz$. Luego se va bajando el radio hasta r .

La construcción anterior es bastante estorbosa pero puede aplicarse con mucha generalidad. Por ello, es conveniente introducir una terminología que permita hacerlo de una vez para todas:

10.6. *Homotopía*. Generalizamos la idea de la construcción anterior para mostrar que $\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1}$ cuando se puede deformar γ_0 a γ_1 continuamente sobre una familia de curvas, todas contenidas en una región D donde f es holomorfa. Hay dos tipos de deformaciones a considerarse que se expresan como “ γ_0 es homotópica a γ_1 ”.

I. Dadas $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow D$ con $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ (comparten extremos). Decimos que $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ en D relativo a extremos fijos si existe una familia de curvas $\gamma_s: [a, b] \rightarrow D$, $s \in [0, 1]$, tales que

- (I) $\gamma_s(t)$ es continua como función de (s, t) ;
- (II) γ_0, γ_1 son las curvas originales;
- (III) $(\forall s) \gamma_s(a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_s(b) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$.

Nota. Si γ_0, γ_1 comparten extremos, entonces automáticamente $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ en $\mathbb{C}$ relativo a extremos fijos: $\gamma_s(t) = s\gamma_0(t) + (1-s)\gamma_1(t)$.

II. Dadas $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow D$ con $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ (curvas cerradas). Decimos que $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ en D como lazos (o que son libremente homotópicas) si existe una familia de curvas $\gamma_s: [a, b] \rightarrow D, s \in [0, 1]$, tales que

- (I) $\gamma_s(t)$ es continua en (s, t) ;
- (II) γ_0, γ_1 son las curvas originales;
- (III) $(\forall s) \gamma_s(a) = \gamma_s(b)$,

Definición. Una curva cerrada es homotópicamente nula (o contraíble) en D si es libremente homotópica en D a una curva constante.

Nota. Todas las curvas cerradas son libremente homotópicas en $\mathbb{C}$, in particular todas son homotópicamente nulas en $\mathbb{C}$.

En las definiciones no hemos dicho que cada γ_s tenga que ser una curva diferenciable.

10.7. Proposición. (T. de Cauchy) (I) Sea $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ en D relativo a extremos fijos. Sean γ_0, γ_1 diferenciables por pedazos. Sea f holomorfa en D . Entonces

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

(II) Lo mismo se tiene si γ_0, γ_1 son curvas cerradas que son libremente homotópicas en D .

Decimos que es un “Teorema de Cauchy” pues en (I) se forma una curva cerrada trazando γ_1 seguida por γ_0 al revés. En (II) se puede considerar el caso de que γ_1 sea constante, así la integral de f a lo largo de γ_1 es 0:

Corolario. Si f es holomorfa en D y γ es homotópicamente nula en D , entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

10.8. Definición. Sea z una singularidad aislada de la función holomorfa f . El residuo de f en z es

$$\text{Res}_z f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} f(\zeta) d\zeta$$

para r pequeño.

Esta definición es válida porque para valores de r pequeños, las curvas $\partial B_r(z)$ son libremente homotópicas entre sí dentro del dominio de f , por definición de singularidad aislada.

10.9. Una “versión de la Fórmula Integral de Cauchy” tiene las mismas hipótesis sobre D, γ, f que una versión del Teorema de Cauchy”.

Teorema. (Formula Integral de Cauchy para un disco) Sea f holomorfa en D . Sea $z_0 \in D$. Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

para todo R, z tales que $\overline{B_R(z_0)} \subseteq D$ y $z \in B_R(z_0)$.

Corolario. Además, f es de clase C^∞ and

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}} dw.$$

Corolario. Una función f holomorfa en un dominio que contenga $\overline{B_R(z_0)}$ está determinada en todo $B_R(z_0)$ por sus valores en $\partial B_R(z_0)$.

VARIABLE COMPLEJA #11

LAS FUNCIONES HOLOMORFAS SON ANALÍTICAS

11.1. Sea f holomorfa en D , y sea $\overline{B_R(z_0)} \subseteq D$. Definimos

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw, \quad k = 0, 1, \dots$$

lo cual sabemos que no depende de cual valor de r que se tome, $0 < r < R$. (Notar que el integrando tiene una singularidad aislada en z_0 .)

Proposición. (Estimado de Cauchy) $|a_k| \leq \frac{\sup |f|}{R^k}$.

Teorema. Sea f holomorfa en $B_R(z_0)$. Entonces

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

para todo $z \in B_R(z_0)$. Además f es analítica en $B_R(z_0)$.

Corolario. Toda función armónica es analítica.

11.2. Proposición. Sean f, g holomorfas en un dominio que contiene $B_R(z_0)$. Supóngase que $(\forall k \geq 0) f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$. Entonces $f = g$ en $B_R(z_0)$.

11.3. Definición. f es una función entera si es holomorfa en $\mathbb{C}$.

La serie de potencias (serie de Taylor) de una función entera converge en todo $\mathbb{C}$.

11.4. Una “versión típica del Teorema de Morera” significa lo siguiente.

Hipótesis: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua; $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para toda γ en cierta familia de curvas cerradas.

Conclusión: f es holomorfa en D .

Observe que si se hace más pequeña la familia de curvas, el teorema se vuelve más fuerte.

Teorema. El Teorema de Morera es válido para la colección de curvas que son perímetros de un rectángulo contenido en D con base horizontal.

Teorema. Sea $f_n \rightarrow f$ uniformemente en D . Sea cada f_n holomorfa. Entonces f es holomorfa.

Nota. Esto nos da un argumento de “razonamiento circular” de que analítica $\implies$ holomorfa: Los polinomios son holomorfos, y las funciones analíticas son límites uniformes de polinomios.

Ejemplo. La suma $\sum_0^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ converge para $|z| < 1$, pero no converge uniformemente en $B_1(0)$. Sin embargo, la suma sí converge

uniformemente en discos de radio menor que 1.

Por eso es conveniente usar la expresión “ $f_n \rightarrow f$ uniformemente en subconjuntos compactos de D ”.

11.5. Para las funciones analíticas, los resultados de Cauchy son transparentes:

Teorema de Cauchy:

$$\oint \left(\sum_0^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right) dz = \sum_0^{\infty} a_k \oint (z - z_0)^k dz = \sum 0 = 0$$

Fórmula Integral de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{w - z} \left(\sum_0^{\infty} a_k (w - z)^k \right) dw &= \frac{1}{2\pi i} \oint \left(\sum_0^{\infty} a_k (w - z)^{k-1} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_0^{\infty} a_k \oint (w - z)^{k-1} dw \\ &= a_0 = f(z). \end{aligned}$$

En general, si

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2z(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz = a_{-1} = \text{Res}_{z_0} f.$$

Esto puede ayudar a apreciar lo fuerte que es el resultado “holomorfa $\implies$ analítica”.

11.6. Teorema. (de Goursat) Sea f complejo-diferenciable en cada punto de D . (No se supone que f sea de clase C^1 .) Entonces $\int_{\gamma} f dz = 0$ para todo rectángulo en D con base horizontal. Por lo tanto f es holomorfa.

DOMINIOS SIMPLEMENTE CONEXOS

11.7. Definición. Un dominio D se llama simplemente conexo si todas las curvas cerradas en D son homotópicamente nulas en D .

Proposición. Si D es simplemente conexo, si $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq D$ y si γ_1, γ_2 comparten extremos, entonces $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ relativo a extremos en D .

Proposición. (T. de Cauchy) Sea D simplemente conexo, f holomorfa en D , $\gamma \subseteq D$ una curva cerrada. Entonces $\int_{\gamma} f dz = 0$.

Proposición. Sea D simplemente conexo, f holomorfa en D . Entonces

- (I) f tiene una primitiva en D ;
- (II) Si $0 \notin f(D)$, entonces existen g, h holomorfas en D tales que $(\forall z \in D) e^{g(z)} = f(z), h(z)^2 = f(z)$ (f tiene un logaritmo y una raíz cuadrada).

Proposición. Sea D simplemente conexo, u armónica en D . Entonces u tiene un conjugado armónico en D .

La función $f(z) = 1/z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y no tiene primitiva, logaritmo ni raíz cuadrada. La función $u(z) = \log |z|$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y no tiene conjugado armónico.

VARIABLE COMPLEJA #12

OTRAS PROPIEDADES DE FUNCIONES HOLOMORFAS

12.1. Esto generaliza el hecho de que un polinomio de grado N es determinado por sus valores en $N + 1$ puntos:

Teorema. (de Identidad) Sean f, g holomorfas en el dominio D . Sean $z_0 \in D, z_n \in D - \{z_0\}, z_n \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Supóngase que $(\forall n) f(z_n) = g(z_n)$. Entonces $f = g$.

Corolario. Sea f holomorfa, no idénticamente cero. Entonces los ceros de f forman un conjunto de puntos aislados (ninguno es límite de otros).

(De hecho el conjunto $f^{-1}(c)$ es de puntos aislados para cualquier $c \in \mathbb{C}$.)

Ejemplo. La función $f(z) = \operatorname{sen} \frac{1+z}{1-z}$ tiene una sucesión de ceros que tienden a 1, pero no es idénticamente cero. (No es holomorfa en $z = 1$.)

Ejemplo. Las funciones $\exp$, $\cos$, sen son las únicas extensiones holomorfas en $\mathbb{C}$ de las funciones reales correspondientes.

12.2. *Permanencia de relaciones.* Para probar una relación de la forma

$$P(f_1(z), f_2(z), \dots) = 0$$

donde P es una operación “bonita” (un polinomio, un operador diferencial, composición de funciones...) y las f_n son holomorfas, basta probarlo en un subconjunto que contenga un punto límite en el dominio, por el Teorema de la Identidad.

Ejemplo.

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \cos z$$

son válidos para $z \in \mathbb{C}$ puesto que son válidos para $z \in \mathbb{R}$.

12.3. *Multiplicades.*

Definición. Sea $f \not\equiv 0$, $f(z) = \sum_0^\infty a_k(z - z_0)^k$. (Notar que $a_k \neq 0$ para por lo menos un k .) Decimos que z_0 es un cero de f de orden (o de multiplicidad) N si $a_N \neq 0$ mientras $(\forall k < N) a_k = 0$.

(Con esta terminología, un “cero de orden 0” no es un cero.) Se dice “simple”, “doble”, “triple”, etc. para multiplicidad 1, 2, 3, etc.

Definición. f toma el valor $c \in \mathbb{C}$ en z_0 con multiplicidad N si $f - c$ tiene un cero de orden N en z_0 .

Una función holomorfa siempre puede escribirse como

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_N(z - z_0)^N + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \\ &= a_0 + (z - z_0)^N \left(a_N + (z - z_0) \sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k+1}(z - z_0)^k \right) \\ &= a_0 + (z - z_0)^N h(z) \end{aligned}$$

donde N es la multiplicidad con que f toma el valor $a_0 = f(z_0)$ y h es una función holomorfa tal que $h(z_0) \neq 0$ (pues $h(z_0) = a_N$).

12.4. Para calcular los N primeros términos de una suma $\sum_0^{\infty} a_k(z - z_0)^k + \sum_0^{\infty} b_k(z - z_0)^k$ no es necesario conocer a_k, b_k para $k \geq N$. Lo mismo se tiene para el producto. Por eso es conveniente la notación

$$\sum_0^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_0^{N-1} a_k(z - z_0)^k + O((z - z_0)^N)$$

donde “ $O((z - z_0)^N)$ en $z = z_0$ ” denota una serie de potencias que no tenga $(z - z_0)^k$ para $k < N$.

Ejemplo. $\operatorname{sen} z = O(z)$ en $z = 0$; $\cos z = 1 + O(z^2)$ en $z = 0$;
 $\cos z = O(1)$ en $z = 0$;

Proposición. (todas estas funciones son holomorfas) Si $f_2(z) = f_1(z) + O(z^N)$, $g_2(z) = g_1(z) + O(z^N)$, $N \geq 1$, entonces

- (I) $f_2(z) + g_2(z) = f_1(z) + g_1(z) + O(z^N)$,
- (II) $f_2(z) g_2(z) = f_1(z) g_1(z) + O(z^N)$.

Si también $(\forall z) g_1(z) \neq 0$, entonces

(iii) $\frac{f_2(z)}{g_2(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)} + O(z^N)$.

Para composiciones de series:

Proposición. Sea $f_1(0) = 0$, $f_2(z) = f_1(z) + O(z^N)$,
 $g_2(w) = g_1(w) + O(w^N)$, $N \geq 1$. Entonces

$$g_2(f_2(z)) = g_1(f_1(z)) + O(z^N).$$

Esta fórmula involucra el cálculo

$$b_0 + b_1(a_1z + a_2z^2 + \dots) + b_2(a_1z + a_2z^2 + \dots)^2 + b_3(a_1z + a_2z^2 + \dots)^3 + \dots$$

y depende del hecho

$$(f_1(z) + O(z^N))^k = (f_1(z))^k + O(z^N).$$

Proposición. (Reversión de series) Sea $f_1(0) = 0$, $f_1'(0) \neq 0$ y $f_2(z) = f_1(z) + O(z^N)$. Entonces

$$f_2^{-1}(w) = f_1^{-1}(w) + O(w^N).$$

Para probar esto es necesario darse cuenta de lo siguiente:

Proposición. Sea f holomorfa, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Entonces existe $r > 0$ tal que f es holomorfa en $B_r(0)$, y la función inversa $f^{-1}: f(B_r(0)) \rightarrow B_r(0)$ es holomorfa.

Hay varias formas de probarlo: (a) calcular la serie de potencias para f^{-1} en $w = 0$; (b) Usar el Teorema de la Función Inversa y el conocimiento de cómo es la Jacobiana de una función holomorfa; (c) otras demostraciones bellas que veremos más tarde.

12.5. *Comportamiento cerca de un cero.* Tenga f un cero de orden n :

$$f(z) = (z - z_0)^n f_1(z) = ((z - z_0)g_1(z))^n = (g(z))^n = h \circ g(z)$$

con $f_1(z_0) = a_n \neq 0$, $g_1(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, $h(w) = w^n$ cerca de z_0 .

Teorema. (de Map Local) Sea f holomorfa en una vecindad de z_0 . Sea $n = \text{ord}_{z_0} f \geq 1$. Entonces hay $r > 0$ y una función g holomorfa en $B_r(z_0)$ tales que g tiene un cero simple en z_0 y $f(z) = g(z)^n$ en $B_r(z_0)$. Además, hay una vecindad V de z_0 tal que f es n -a-1 en $V - \{z_0\}$. Para $\epsilon > 0$ pequeño y cualquier $w \in B_\epsilon(0) - \{0\}$, la ecuación

$$f(z) = w$$

tiene n raíces (distintas) z en $V - \{z_0\}$.

Nota. Cuando $f(z_0) \neq 0$ se puede aplicar este resultado a $n = \text{ord}_{z_0}(f - f(z_0)) =$ cuántas veces f toma su valor en z_0 .

ORDENES DE CRECIMIENTO

12.6. Consideremos una función $h: (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Supongamos que $h(x) > 0$ para $x \neq x_0$. Definamos

$$O_{x_0}(h) = \left\{ f: \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{h(x)} < \infty \right\},$$

$$o_{x_0}(h) = \left\{ f: \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{h(x)} = 0 \right\}$$

(f definida en alguna vecindad de x_0). Él crecimiento de f está controlado por h cerca de x_0 . Comúnmente en lugar de “ $f \in O_{x_0}(h)$ ” se escribe “ $f = O(h(x))$ cerca de $x = x_0$ ” (o “cuando $x \rightarrow x_0$ ”). (Similar para $o(h(x))$.) Así

$$f(x) = O(h(x)) \quad \text{significa} \quad (\exists c) (\forall x \text{ cerca de } x_0) |f(x)| \leq c h(x),$$

$$f(x) = o(h(x)) \quad \text{significa} \quad (\exists \varepsilon(x): \varepsilon(x) \rightarrow 0) (\forall x \text{ cerca de } x_0)$$

$$|f(x)| \leq \varepsilon(x) h(x).$$

Así “ $f(x) = o(h(x))$ ” es otra forma de decir “ $f(x)/h(x) \rightarrow 0$ ”. Nunca se escribe al revés “ $O(h(x)) = f(x)$ ” (el “=” no es simétrico).

Ejemplo. $\sin x = O(|x|)$ en $x = 0$.

Normalmente se usan funciones monótonas como $|x|^n$, e^x , $\log x$ para $h(x)$ (no tienen que tender a 0).

Nota. $f(x) = O(1)$ significa que f es acotada cerca de x_0 ;
 $f(x) = o(1)$ significa que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow x_0$.

Nota. Si $\beta > \alpha$, entonces $f(x) = O(|x|^\beta) \implies f(x) = O(|x|^\alpha)$ cerca de $x = 0$. Así se escribe $x^\beta = O(|x|^\alpha)$.

Hay variantes de esta notación con diversos dominios, tales como $h: [x_0, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f: B_\epsilon(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$, $x_0 = \infty$, etc.

12.7. Las clases $O(\)$ y $o(\)$ obedecen ciertas reglas, por ejemplo $O(h(x)) + o(h(x)) = O(h(x))$, etc.

$$\begin{aligned} \frac{3x^2}{\log x} + \sin x^3 + x^4 \cos x &= O(|x|^2)o(1) + O(|x|^3) + O(|x|^4)O(1) \\ &= o(|x|^2) \text{ en } x = 0. \end{aligned}$$

12.8. Proposición. Sea f holomorfa con un cero de orden n en z_0 . Escríbase

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots, \quad a_n \neq 0.$$

Entonces
$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} = a_n.$$

Corolario. En $z = z_0$ se tiene $f(z) = O(|z - z_0|^n)$, y para $\epsilon > 0$, $f(z) = o(|z - z_0|^{n-\epsilon})$, $f(z) \neq O(|z - z_0|^{n+\epsilon})$.

Corolario.

(I) Si f es holomorfa en z_0 y si $f(z) = O(|z - z_0|^\alpha)$, $n \leq \alpha$, $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces f tiene un cero de orden por lo menos n en z_0 .

(II) Si $f(z) \notin O(|z - z_0|^\alpha)$, $\alpha < n$, entonces f no tiene un cero de orden por lo menos n en z_0 .

En otras palabras: la velocidad de tender f a cero cerca de z_0 , dada por el número

$$\sup \left\{ \alpha: \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^\alpha} \rightarrow 0 \text{ cuando } z \rightarrow z_0 \right\},$$

es un entero cuando f es holomorfa.