INTEGRACIÓN SOBRE CURVAS

9.1. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ será una curva (i.e. continua) en $\mathbb{C}$.

Definición. La longitud de γ es

$$\text{long}(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \right\}.$$

Se dice que γ es rectificable cuando $\text{long}(\gamma) < \infty$.

Definición. Una reparametrización de γ es una curva $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ donde $\varphi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$ es un homeomorfismo creciente.

Proposición. Cuando $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ se tiene $\text{long} \tilde{\gamma} = \text{long} \gamma$.

Proposición. Cuando γ es de clase C^1 , se tiene

$$\text{long} \gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Solamente usaremos curvas de clase C^1 por pedazos. Tenemos

$$\text{long} \gamma \leq (b - a) \max_{[a, b]} |\gamma'|.$$

Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, y $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ de clase C^1 .

Proposición. Sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^1 . Entonces

$$\text{long}(f \circ \gamma) = \int_a^b \left| J_f|_{\gamma(t)} \gamma'(t) \right| dt.$$

La siguiente notación es muy conveniente. Consideremos algún conjunto $E \supseteq \gamma([a, b])$, y una función $p: E \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición. La integral de línea de p con respecto a longitud de arco de γ es

$$\int_{\gamma} p(z) |dz| = \int_a^b p(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

(Nótese que z, t son variables mudas, salvo que se entiende que $z \in \mathbb{C}$ y $t \in \mathbb{R}$.) Esto requiere que $p \circ \gamma$ sea integrable.

Con esta definición, cuando f es holomorfa la proposición se expresa como

$$\text{long}(f \circ \gamma) = \int_{\gamma} |f'(z)| |dz|.$$

9.2. Recordemos que la integral se aproxima por una sumatoria *real*,

$$\int_a^b p(t) dt \approx \sum p(t_k) \Delta t_k.$$

Para una función $f = u + iv: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ podemos definir la integral

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Entonces

$$\int_a^b f(t) dt \approx \sum f(t_k) \Delta t_k$$

es aproximada por una sumatoria *compleja*, aunque Δt_k es real. Se vuelve más interesante cuando la “diferencial” también es compleja.

9.3. Integrales de línea. Tenemos $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, f definida en $\gamma([a, b])$. Queremos una integral

$$\int_{\gamma} f(z) dz \approx \sum f(z_k) \Delta z_k$$

donde ahora Δz_k es complejo.

Ejemplo. Un ejemplo ilustrativo es $\int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{z} dz$. Se aproxima por $\sum \frac{1}{z_k} \Delta z_k$ donde $\Delta z_k \approx (\Delta \theta_k) \cdot iz_k$. De esto $\sum \frac{1}{z_k} \Delta z_k \approx i \sum \Delta \theta_k = 2\pi i$, que resulta que no depende de r .

Otro ejemplo es la integral sobre un segmento de radio, de $r_1 e^{i\theta}$ a $r_2 e^{i\theta}$ para θ fijo, $r_1 < r_2$. Aquí $\Delta z_k = e^{i\theta} \Delta r$, $\frac{1}{z_k} = \frac{1}{r_k} e^{-i\theta}$, luego $\frac{1}{z_k} \Delta z_k \approx \frac{1}{r_k} \Delta r_k$ lo cual no depende de θ . Por lo tanto esta integral es un número real.

9.4. Definición. La integral de línea de una función compleja sobre una curva diferenciable se define como

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Lo esencial aquí es de observar que el integrando incluye una multiplicación de números complejos, uno de los cuales representa el vector tangente a la curva.

Proposición. Si $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización diferenciable de γ , entonces

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Ahora escribiremos $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ (=“ $z(t)$ ”), de manera que $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Con $f(z) = u(z) + iv(z)$ tenemos $f(\gamma(t)) = u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b (u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t)) dt \\ &\quad + i \int_a^b (v(\gamma(t))x'(t) + u(\gamma(t))y'(t)) dt \end{aligned}$$

Esto se expresa en forma más sencilla como sigue,

Definición.

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_a^b (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)) dt.$$

Así

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u + iv)dx + (-v + iu)dy \\ &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy). \end{aligned}$$

La misma expresión se obtiene al escribir $z = x + iy$, $dz = dx + i dy$, que da

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$$

9.5. Ejemplo.
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{z} dz &= \int \frac{dx + i dy}{x + iy} = \int \frac{x - iy}{x^2 + y^2} (dx + i dy) \\ &= \int \frac{(x dx + y dy) + i(-y dx + x dy)}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo. La fórmula de un conjugado armónico v de u se puede expresarse más fácilmente como

$$v(x, y) = \int_{\gamma_{x,y}} u_x dy - u_y dx.$$

9.6. Definición. $\int_{\gamma} f(z) d\bar{z} = \int_a^b f(\gamma(t)) \overline{\gamma'(t)} dt.$

Ejercicio. $\int_{\gamma} f(z) d\bar{z} = \overline{\int_{\gamma} \bar{f} dz}.$

9.7. Terminología y notación.

$\int_{\partial B_r(z)}$ significa $\int_{\gamma}$ donde $\gamma(t) = z + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Si ∂D es una unión finita de curvas cerradas simples, en $\int_{\partial D}$ se entenderá que se orientan de manera que encuentren a D a su izquierda.

Definición. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva cerrada (o lazo) si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(No confundir con “conjunto cerrado”, $\gamma([a, b])$ siempre es cerrado.)

$\int_{\partial \text{rectángulo}}$ significa $\int_{\gamma}$

donde $\gamma(t)$ traza el perímetro del rectángulo en el sentido antihorario.

9.8. Proposición. (de Green para un rectángulo) Sea $[a, b] \times [c, d] \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$ (D abierto) y sean $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 . Entonces

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial([a,b] \times [c,d])} (P dx + Q dy).$$

9.9. Propiedades de la integral de línea compleja.

Proposición. (a) $\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt \quad (g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}).$

(b) $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq (\max_{\gamma} |f|)(\text{long } \gamma) \quad (f: D \rightarrow \mathbb{C}, \gamma \subseteq D).$

Proposición. Sea $f_n \rightarrow f$ uniformemente en γ (rectificable) cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces $\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Ejemplo. Sean $f(x) = 0$, $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ para $x \in [0, 1]$. Entonces $f_n \rightarrow f$ puntualmente pero no uniformemente, y $\int_0^1 f_n dx = 1 - (n+1)e^{-n} \rightarrow 1 \neq 0 = \int_0^1 f dx$.

Proposición. Sean $\gamma \subseteq D$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $F: D \rightarrow \mathbb{C}$, F holomorfa, $F' = f$. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Corolario. Si f tiene una primitiva en una vecindad de una curva cerrada γ , entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Ejemplo. Sea $f(z) = \frac{1}{z}$ en $D = \mathbb{C} - \{0\}$. Esta f no tiene ninguna primitiva, pues si la tuviera, entonces por el corolario se tendría

$$\int_{\partial B_1(0)} f(z) dz = 0$$

pero sabemos que el valor de la integral es $2\pi i$.

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

Proposición. Sea $\varphi(z, w)$ definida para $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, $w \in \gamma$. Supóngase que

- (I) $(\forall z) w \mapsto \varphi(z, w)$ es continua,
- (II) $(\forall w) z \mapsto \varphi(z, w)$ es holomorfa (escribiremos $\partial\varphi(z, w)/\partial z$ para la derivada),
- (III) $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z, w)$ es continua en (z, w) .

Entonces la función $z \mapsto \int_{\gamma} \varphi(z, w) dw$ es holomorfa, y su derivada es

$$\frac{d}{dz} \left(\int_{\gamma} \varphi(z, w) dw \right) = \int_{\gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z, w) dw$$

(“diferenciación a través del signo de integración”).

Ejemplo. La *función gamma de Euler* $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$.
(Hay que trabajar: aplicar la Proposición a $\int_{1/N}^N$ y tomar límites.)