VARIABLE COMPLEJA $\#6$

FUNCIONES ANALÍTICAS Y FUNCIONES HOLOMORFAS

Definición. $D \subseteq \mathbb{C}$ es abierto si $(\forall z \in D)(\exists r > 0)\ B_r(z) \subseteq D$.

6.1. Una función analítica es "localmente una serie de potencias":

Definición. $f\colon D \to \mathbb{R}$ es real-analítica si $(\forall z_0 \in D)$ $(\exists r > 0)$ $(\exists \{a_{jk}\} \subseteq \mathbb{R})$ $(\forall z \in B_r(z_0))$

$$f(z) = \sum_{j,k\,\geq\,0}\sum a_{jk}\,(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0)^j\,(\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0)^k$$

$f\colon D \to \mathbb{C}$ es real-analítica si $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son real-analíticas.

Definición. $f\colon D \to \mathbb{C}$ es (complejo-)analítica si $(\forall z_0 \in D)$ $(\exists r > 0)$ $(\exists \{a_k\}_0^\infty \subseteq \mathbb{C})$ $(\forall z \in B_r(z_0))$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Nótese $f(z_0) = a_0$. (Por convención, $0^0 = \lim_{z\to 0} z^0 = 1$ en las series de potencias.) Nótese que $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ son real-analíticas.

Definición. $f\colon D \to \mathbb{C}$ es holomorfa si f es de clase C^1 (tiene derivadas parciales que son continuas) y para cada $z_0 \in D$ existe el límite

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Este límite se llama $f'(z_0)$, la derivada compleja de f en el punto z_0.

(Más adelante veremos que si $f \in C^0$ y si $(\forall z_0)$ $f'(z_0)$ existe, entonces f es holomorfa.)

6.2. Para entender el concepto "holomorfa" hay que entender bien el concepto de límite en $\mathbb{C}$. Cuando $L = \lim_n z_n$, Tenemos $|z_n - L| \to 0$. Esto no dice nada sobre los valores de $\arg(z_n - L)$. Es posible que estos argumentos tomen valores arbitrarios.

6.3. Sin embargo, para entender el concepto "holomorfa" es útil pensar en la <u>derivada</u> <u>direccional</u>. Sea $f \in C^1$. Fijemos $\sigma \in \mathbb{C}$, que se usará como una "dirección". Se define

$$D_\sigma f(z_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(z_0 + t\sigma)$$

(donde $t \in \mathbb{R}$).

La recta $t \mapsto z_0 + t\sigma$ es una curva con tangente igual a σ en $t = 0$, luego la imagen $t \mapsto f(z_0 + t\sigma)$ es una curva con tangente igual a

$$D_\sigma f(z_0) = \left(J_f \,\Big|_{z_0} \right) \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \sigma \\ \operatorname{Im} \sigma \end{pmatrix}.$$

Por eso, la derivada $D_\sigma f$ como función de σ está determinada cuando conocemos los dos casos particulares $D_1 f$, $D_i f$:

$$D_{(1,0)} f(z_0) = (\partial f/\partial x)|_{z_0},$$

$$D_{(0,1)} f(z_0) = (\partial f/\partial y)|_{z_0}$$

(que son las dos columnas de $J_f|_{z_0}$).

6.4. También podemos escribir (suponiendo $\sigma \neq 0$)

$$D_\sigma f(z_0) = \sigma \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + t\sigma) - f(z_0)}{t\sigma}$$

Para funciones $f \in C^1$ en general, éste último límite depende de σ (porque $\partial f/\partial x$ es independiente de $\partial f/\partial y$). Pero cuando f es holomorfa, por defínición el límite (sin el factor σ) es $f'(z_0)$ no importa el valor de $\sigma \in \mathbb{C} - \{0\}$.

<u>Proposición.</u> f holomorfa $\Longrightarrow$

$$(\forall z_0 \in D)(\forall \sigma \in \mathbb{C} - \{0\}) \quad D_\sigma f(z_0) = \sigma f'(z_0).$$

Con $\sigma = 1$ obtenemos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f'$. Con $\sigma = i$ obtenemos $\dfrac{\partial f}{\partial y} = if'$.

<u>Proposición.</u> $f = u + iv$ holomorfa $\iff$ $f \in C^1$ y u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en cada punto del dominio de f.

Nota. *f es holomorfa cuando f' existe y es continua en D.* Esto es porque cuando $f'(z)$ existe, se tiene $f_x = u_x + iv_x$, $f_y = u_y + iv_y$. Si f' es continua, entonces u_x, u_y, v_x, v_y son continuas, y por tanto $f \in C^1$.

6.5. Definición. f es antiholomorfa cuando la función $z \mapsto \overline{f(z)}$ es holomorfa.

Ejercicio. f es antiholomorfa $\iff$ $z \mapsto f(\overline{z})$ es holomorfa.

f, g holomorfas $\implies$ $f + g$, fg, holomorfas y $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$. Si $(\forall z)\ g(z) \neq 0$ (g no se anula), entonces f/g es holomorfa y $(f/g)' = (gf' - fg')/g^2$.

f holomorfa cerca de z_0, $f'(z_0) \neq 0$ $\implies$ f es invertible cerca de z_0, f^{-1} es holomorfa cerca de $f(z_0)$, y $(f^{-1})'(f(z_0)) = 1/f'(z_0)$.

Definición. $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

f es holomorfa $\iff$ $f_{\overline{z}} = 0$. f es antiholomorfa $\iff$ $f_z = 0$. Cuando f es holomorfa, se tiene $f' = f_z$. (Cuando f no es holomorfa, no se puede hablar de "f'" como tal.)

VARIABLE COMPLEJA #7

REPASO DE TOPOLOGÍA

Sea $E \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$.

Definición. z es un punto adherente a E si $(\exists \{z_n\} \subseteq E)\ z_n \to z$ cuando $n \to \infty$.
z es un punto límite de E si $(\exists \{z_n\} \subseteq E - \{z\})\ z_n \to z$ cuando $n \to \infty$.
adherencia de E $= \operatorname{cerr} E = \{z\colon\ z \text{ es adherente a } E\}$
$= E \cup \{\text{puntos límites de } E\}$.
E es cerrado si $E = \operatorname{cerr} E$.
interior de E $= \operatorname{int} E = \{z\colon\ (\exists r)\ B_r(z) \subseteq E\}$.
frontera de E $= \partial E = \operatorname{cerr} E - \operatorname{int} E$.

E es abierto si $E = \operatorname{int} E$.

Ejercicio. E es cerrado $\iff$ $\mathbb{C} - E$ es abierto $\iff$ $\partial E \subseteq E$

Teorema. (Bolzano-Weierstrass) Sea $E \subseteq \mathbb{C}$, E infinito, cerrado y acotado. Entonces cada sucesión en E tiene una subsucesión que converge en E. (E es secuencialmente compacto.)

Teorema. (Heine-Borel) Sea $E \subseteq \mathbb{C}$, E cerrado y acotado. Supóngase que $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$, con cada G_α abierto. Entonces existe un número finito de índices α_1, α_2,. . . ,α_n tales que $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}$. ($E$ es compacto.)

Ejercicio. Sean A, B dos subconjuntos cerrados, no-vacíos, disjuntos en $\mathbb{C}$. Supóngase que A es acotado. Entonces
(I) $(\exists r > 0)\ (\forall a \in A,\ b \in B)\ |a - b| \geq r$.
Defínase $d = \inf\{|a - b|\colon\ a \in A,\ b \in B\}$. Entonces $d > 0$ y
(II) $(\exists a \in A,\ b \in B)\ |a - b| = d$.

E es conexo si no hay $A, B \subseteq \mathbb{C}$ abiertos tales que $A \cap B = \varnothing$, $A \cap E \neq \varnothing$, $B \cap E \neq \varnothing$.

Definición. Un dominio en $\mathbb{C}$ es un subconjunto abierto y conexo.

Proposición. Todo dominio en $\mathbb{C}$ es arco-conexo. (Cualquier par de puntos del dominio son puntos inicial, final de una curva en el dominio.)

Proposición. $f\colon E \to \mathbb{C}$ localmente constante, E conexo $\implies$ f constante.

Corolario. $f\colon E \to \mathbb{Z}$ continua, E conexo $\implies$ f constante.

Proposición. Sea γ una curva en D. Entonces la imagen $\gamma([t_0, t_1])$ es cerrada, acotada, conexa.

Definición. Sea f holomorfa en D. Una primitiva (o antiderivada) de f en D es una función F tal que F es holomorfa en D y $F' = f$.

Proposición. Si f es holomorfa en el dominio D y $f' = 0$, entonces f

es constante.

Corolario. Cualesquier dos primitivas de una función holomorfa f en un dominio D difieren por una constante.

SERIES DE POTENCIAS

8.1. Definición. La serie de potencias formales en z basada en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y con la sucesión de coeficientes a_k es la serie $\sum c_k$ donde $c_k = a_k(z - z_0)^k$.

La palabra "formal" señala aquí es que "z" no representa nada (no suponemos que $z \in \mathbb{C}$), se dice que z es un "indeterminado". El concepto de convergencia no entra en la definición. Sin embargo, se puede definir la *suma* de dos series de potencias formales (centradas en el mismo z_0) de la forma natural, así como su *producto de Cauchy.*

Ejemplo. $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \quad (z_0 = 0)$;
$\cosh z = (1/2)(\exp z + \exp(-z))$;
$\operatorname{senh} z = (1/2)(\exp z - \exp(-z))$;
$\cos z = (1/2)(\exp(iz) + \exp(-iz))$;
$\operatorname{sen} z = (1/(2i))(\exp(iz) - \exp(-iz))$; etc.

Ejercicio. $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1 = \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z$, $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$, etc. como series de potencias formales.

Ejercicio. ¿Cuándo se puede dividir una serie de potencias formales entre otra?

8.2. Ahora consideremos la cuestión de la convergencia de las series de potencias, suponiendo que $z \in \mathbb{C}$. Primero notemos que siempre converge cuando $z = z_0$, la suma es $a_0 + 0 + 0 + \cdots = a_0$. (La potencia $(z_0 - z_0)^0$ tiene que interpretarse como 1.)

Para muchas consideraciones podemos suponer $z_0 = 0$. Para probar una proposición acerca de funciones f definidas en un disco $B_r(z_0)$ (o un dominio que contenga $B_r(z_0)$), primero la probamos para funciones en $B_r(0)$. Después aplicamos el caso particular a la función g, $g(z) = f(z + z_0)$. En particular para muchos resultados de series de potencias es suficiente considerar $\sum a_k z^k$ en lugar de la forma general $\sum a_k(z - z_0)^k$.

<u>Proposición.</u> Sea $\{a_k\} \subseteq \mathbb{C}$. Defínase $R \in [0, \infty]$ por

$$R \;=\; \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}}.$$

Entonces (i) $(\forall z \in B_R(0))$ $\sum a_k z^k$ converge absolutamente, a la vez que
(ii) $(\forall z \in \mathbb{C} - \overline{B_R(0)})$ $\sum a_k z^k$ no converge.
Además
(iii) Cuando $0 < R' < R$, $\sum a_k z^k$ converge uniformemente en $\overline{B_{R'}(0)}$.
(<u>Aqui</u> por convención tomamos $B_0(0) = \varnothing$, $\overline{B_0(0)} = \{0\}$, $B_\infty(0) = \overline{B_\infty(0)} = \mathbb{C}$.)

<u>Definición.</u> El número R en esta proposición se llama el <u>radio de convergencia</u> de la serie de potencias.

8.3. <u>Proposición.</u> Si las dos series de potencias $\sum a_k(z - z_0)^k$, $\sum b_k(z - z_0)^k$ basadas en el mismo punto z_0 convergen para todo z en $B_{R'}(z_0)$, entonces la suma

$$\sum (a_k + b_k)(z - z_0)^k,$$

y el producto de Cauchy

$$\sum_n \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k (z - z_0)^n \right)$$

también convergen en el mismo disco.

<u>Ejercicio.</u> ¿Qué se puede decir del cociente de dos series de potencias convergentes?

<u>Ejercicio.</u> Investigar los radios de convergencia de la suma y del producto de dos series de potencias.

Vamos a investigar las propiedades de funciones definidas por series de potencias.

8.4. Recordemos que

holomorfa: $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, $\quad f \in C^1$

(Riemann)

analítica: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ localmente (a_k dependen de z_0)

(Weierstrass)

8.5. Sea $f(z) = \sum_0^\infty a_k (z - z_0)^k$ convergente en $B_R(z_0)$ ($R > 0$). Por converger uniformemente la serie, f es continua. Queda por determinar si tal f es holomorfa (ya lo sabemos para el caso particula exp), y si es analítica.

8.6. La serie formalmente derivada de $\sum_0^\infty a_k (z - z_0)^k$ se define como

$$f^{(1)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z - z_0)^k.$$

Es una serie de potencias formales, ahora investigamos su convergencia. Suponiendo $0 < R < \infty$, consideremos

$$\begin{aligned} |(k+1)a_{k+1}|^{1/k} &= (k+1)^{1/k} |a_{k+1}|^{1/k} \\ &= (k+1)^{1/k} |a_{k+1}|^{1/(k+1)} |a_{k+1}|^{1/k \,-\, 1/(k+1)} \end{aligned}$$

Sabemos $\lim (k+1)^{1/k} = \lim k^{1/k} = 1$, además

$$|a_k|^{\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}} = |a_k|^{\frac{1}{k(k-1)}} = \left(|a_k|^{1/k} \right)^{1/(k-1)} \to R^0 = 1$$

porque $1/(k-1) \to 0$. Así $\limsup |(k+1)a_{k+1}|^{1/k} = 1 \cdot \frac{1}{R} \cdot 1 = \frac{1}{R}$. Por la prueba de la raíz, la serie $f^{(1)}(z)$ tiene el mismo radio de convergencia R. Por eso la serie converge a una función $f^{(1)}$ que es continua en $B_R(z_0)$.

Se aplica esto ahora a $f^{(1)}$ para obtener derivadas sucesivas,

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n}$$

la n-ésima derivada formal de f.

Hasta aquí simplemente hemos logrado definir unas funciones, todavía falta demostrar que f es holomorfa y $f' = f^{(1)}$.
(Al tener esto, todavía no habríamos mostrado que f es analítica.)

8.7. Cambio de Punto Base. Primero veamos que las series de potencias convergentes son analíticas. Depende de la *fórmula de cambio de punto base*. Supongamos que $f(z) = \sum_0^\infty a_k(z-p)^k$ converge en $B_R(p)$ $(R > 0)$. Tomemos $q \in B_R(p)$. Los sumandos pueden expanderse como

$$(z-p)^k = ((z-q)+(q-p))^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (z-q)^j (q-p)^{k-j} \qquad (*)$$

por lo que

$$\begin{aligned} f(z) &\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (z-q)^j (q-p)^{k-j} \\ &¿=? \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} a_k \binom{k}{j} (z-q)^j (q-p)^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} a_k \binom{k}{j} (q-p)^{k-j} \right) (z-q)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z-q)^j \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-j+1)\, a_k\, (q-p)^{k-j} \\ &= \frac{1}{j!} f^{(j)}(q) \end{aligned}$$

que es una constante por la j-ésima derivada formal de f en q. Tenemos que justificar el cambio de orden de la sumatoria. Estamos usando los sumandos

$$d_{kj} = a_k \binom{k}{j} (z-q)^j (q-p)^{k-j}$$

para $0 \leq j \leq k$. Sea $r = R - |q-p|$ y supongamos que $z \in B_r(q)$, así

$$|z-q| + |q-p| < R.$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} |d_{kj}| \overset{(*)}{=} \sum_{k} |a_k| (|z-q| + |q-p|)^k < \sum_{k} |a_k| (R')^k < \infty$$

para algún R', $|z-q| < R' < R$. Consideremos la serie doble $\sum_{j,k} d_{kj}$ en la cual ponemos $d_{kj} = 0$ para $j > k$. Notemos que $\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} |d_{kj}| = \sum_{I_n} |d_{kj}|$ donde I_n son los "bloques cuadrados de índices" $I_n = \{(k,j)\colon\ 1 \le k \le n,\ 1 \le j \le n\}$. Así hemos mostrado que la sumatoria doble converge absolutamente. Por lo tanto cualquier reordenamiento converge absolutamente. Esto justifica el cambio de orden de las sumatorias.

Proposición. Toda serie de potencias convergente define una función analítica: si $f(z) = \sum_0^\infty a_k(z-p)^k$ converge en $B_R(p)$ $(R > 0)$, entonces para cualquier $q \in B_R(p)$,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(q)}{j!}\,(z-q)^j$$

donde la serie centrada en q converge en $B_{R-|q-p|}(q)$.

8.8. Proposición. Toda serie de potencias convergente define una función holomorfa, cuya derivada es igual a la derivada formal: $f' = f^{(1)}$. "Una serie de potencias puede derivarse término por término."

Demostración. Sea $f(z) = \sum_0^\infty a_k(z-z_0)^k$. Sea $z \neq z_0$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \frac{\sum_1^\infty a_k(z-z_0)^k}{z-z_0} = \sum_1^\infty a_k(z-z_0)^{k-1} \\ &= \sum_0^\infty a_{k+1}(z-z_0)^k \ \to a_1 \text{ cuando } z \to z_0\end{aligned}$$

por el hecho de que las series de potencias definen funciones continuas. Esto muestra que f es complejo-diferenciable en z_0 (pero todavía no en el resto del disco), y que $f'(z_0) = a_1 = f^{(1)}(z_0)$. La derivada coincide con la derivada formal en el punto que es centro de la serie de potencias.

Pero para cualquier $q \in B_R(z_0)$, en una vecindad de q se puede expresar $f(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} f^{(k)}(q)(z-q)^k$. Ahora q es centro de la serie bajo consideración, luego por lo que acabamos de probar, $f'(q) = f^{(1)}(q)$. Como $f^{(1)}$ es continua, f es holomorfa. $\square$

8.9. De aquí en adelante $f^{(k)}(z)$ denota la k-ésima derivada (ya no es necesario distinguirla de la derivada formal). Por inducción, cuando

$f(z) = \sum_0^\infty a_k(z-z_0)^k$ se tiene

$$f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k.$$

Nota. Las funciones analíticas son de clase C^∞. Pero C^∞ no implica analítica, y no toda funcion C^∞ es igual a la suma de su serie de Taylor. Consideremos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Esta función es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, y $(\forall k)\ f^{(k)}(0) = 0$. Por lo tanto

$$f(x) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k$$

para $x > 0$. Por lo tanto f no es analítica.

8.10. Proposición. (Unicidad de los coeficientes de una serie de potencias) Supóngase que $r > 0$ y que para todo $z \in B_r(z_0)$,

$$\sum_0^\infty a_k(z-z_0)^k = \sum_0^\infty b_k(z-z_0)^k.$$

Entonces $a_k = b_k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Nota. Existen clases de series $\sum a_k\, \varphi_k(z)$ (no de potencias) que no tienen esta propiedad de unicidad. Por ejemplo, sea $\varphi_0(z) = 1$ y

$$\varphi_k(z) = \frac{z^k}{k!} - \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}$$

para $k \geq 1$. Entonces para todo z,

$$\sum_0^\infty 1 \cdot \varphi_k(z) = 0 = \sum_0^\infty 0 \cdot \varphi_k(z).$$

8.11. Hemos verificado que analítica $\implies$ holomorfa. La implicación recíproca vendrá más tarde porque requiere el concepto de la integración.