VARIABLE COMPLEJA #4

SERIES INFINITAS

4.1. Sean $a_k \in \mathbb{C}$. Las sumatorias (finitas) se pueden definir de forma recursiva,

Definición. $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{k_0-1} a_k = 0; \qquad \sum_{k=k_0}^{N} a_k = a_N + \sum_{k=k_0}^{N-1} a_k$ para $N \geq k_0$.

Sea $L \in \mathbb{C}$.

Definición. $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = L$ significa $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{N} a_k \to L$ cuando $N \to \infty$.

(=límite de sumas parciales) Cuando tal L existe, decimos que $\sum a_k$ es convergente. De otro modo es divergente.

Ejemplo. $\sum a^k$ (s. geométrica) es convergente cuando $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$.
Demostración.

$$\sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1-a^{N+1}}{1-a} \to \frac{1}{1-a}. \quad \square$$

$\sum 1/k$ (s. armónica) es divergente. Demostración.

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{2} \qquad + \qquad \frac{1}{2} \qquad + \qquad \cdots \quad \square$$

Proposición. $\sum a_k$ convergente $\implies \displaystyle\sum_{k=N}^{\infty} a_k \to 0$ cuando $N \to \infty$

(cola de una serie).
Demostración.

$$\sum_{N}^{\infty} a_k = \sum_{k_0}^{\infty} a_k - \sum_{k_0}^{N-1} a_k \to L - L \text{ cuando } N \to \infty. \quad \square$$

Proposición. $\sum a_k$ convergente $\implies$ $a_k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

$$a_k = \sum_{k_0}^{k} a_k - \sum_{k_0}^{k-1} a_k \to L - L \text{ cuando } N \to \infty. \quad \square$$

Proposición. $\sum a_k$, $\sum b_k$ convergentes $\implies$

$\sum (a_k + b_k)$ es convergente y $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k + b_k)$.

Demostración.

$$\sum_{k=k_0}^{N} (a_k + b_k) = \sum_{k=k_0}^{N} a_k + \sum_{k=k_0}^{N} b_k \to \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k \text{ cuando } N \to \infty. \quad \square$$

4.2. Proposición. (Criterio de Comparación)

$(\forall k)\ 0 \le a_k \le b_k$, $\sum b_k$ convergente $\implies$ $\sum a_k$ convergente.

Demostración.

$$\Big|\sum_{k=k_0}^{n} a_k - \sum_{k=k_0}^{m} a_k\Big| = \Big|\sum_{k=m}^{n} a_k\Big| = \sum_{k=m}^{n} a_k \le \sum_{k=m}^{n} b_k \to 0 \text{ cuando } m, n \to \infty$$

porque $\{\sum_{k=k_0}^{N} b_k\}_N$ es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto $\{\sum_{k=k_0}^{N} a_k\}_N$ es una sucesión de Cauchy y luego converge. $\square$

Ejemplo. $a \in \mathbb{R}$. Entonces $\sum k^a$ diverge para $a \ge -1$ por comparación con $\sum (1/k)$. Para $a < -1$, escribimos $b = -a$ para claridad, con $b > 1$,

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} k^a = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} k^{-b} < \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} (2^n)^{-b} = 2^n (2^n)^{-b} = (2^n)^{1-b} = (2^{1-b})^n.$$

Como $2^{1-b} < 1$, la serie $\sum_k k^a$ converge por comparación con la serie geométrica $\sum_n (2^{1-b})^n$.

4.3. Definición. $\sum a_k$ es absolutamente convergente cuando $\sum |a_k|$ es convergente.

$\sum a_k$ se dice condicionalmente convergente cuando es convergente pero no absolutamente convergente.

Proposición. $\sum a_k$ absolutamente convergente $\implies$ $\sum a_k$ convergente.

Demostración. $\left|\sum_{m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{m+1}^{n} |a_k| \to 0$ cuando $m, n \to \infty$. $\square$

4.4. Un reordenamiento de $\sum a_k$ es la serie $\sum a_{n_k}$ donde $k \mapsto n_k$ es una biyección de los índices $\{k \in \mathbb{Z}\colon\ k \geq k_0\}$.

Lema. Sean $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \geq 0$, $\sum a_k$ convergente. Si $\sum a_{n_k}$ es un reordenamiento de $\sum a_k$, entonces $\sum a_{n_k}$ es convergente y $\displaystyle\sum_1^\infty a_{n_k} = \sum_1^\infty a_k$.

Demostración. Sea $L = \sum_{k_0}^\infty a_k$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos N tal que $\sum_{k=N}^\infty a_k < \epsilon/2$. Así $\left|\sum_{k=k_0}^{N'} a_k - L\right| < \epsilon/2$ para todo $N' > N$. Tomamos N' tan grande que

$$[k_0, N] \subseteq \{n_{k_0},\ n_{k_0+1},\ \ldots,\ n_{N'}\}.$$

Escribimos $\Delta(N, N') = \{n_{k_0},\ n_{k_0+1},\ \ldots,\ n_{N'}\} \setminus [k_0, N]$. Entonces

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=k_0}^{N'} a_{n_k} - L\Big| &= \Big|\sum_{k=k_0}^{N} a_k \ + \sum_{k\in\Delta(N,N')} a_k \ - \ L\Big| \\ &\leq \Big|\sum_{k=k_0}^{N} a_k \ - L\ \Big| + \sum_{k\in\Delta(N,N')} a_k \ < \ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Corolario. Sean $a_k \in \mathbb{C}$, $\sum a_k$ absolutamente convergente. Si $\sum a_{n_k}$ es un reordenamiento de $\sum a_k$, entonces $\sum a_{n_k}$ es convergente y $\displaystyle\sum_{k_0}^\infty a_{n_k} = \sum_{k_0}^\infty a_k$.

Demostración. Tenemos $\sum |a_k|$ convergente, $|a_k| \in \mathbb{R}$. Por el lema, el reordenamiento $\sum |a_{n_k}|$ es convergente. Por el Criterio de Comparación, $\sum |\operatorname{Re} a_{n_k}|$ y $\sum |\operatorname{Im} a_{n_k}|$ son convergentes, o sea $\sum \operatorname{Re} a_{n_k}$ y $\sum \operatorname{Im} a_{n_k}$ son absolutamente convergentes. Ahora

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k_0}^{N} a_{n_k} = \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{k_0}^{N} \operatorname{Re} a_{n_k} + i \sum_{k_0}^{N} \operatorname{Im} a_{n_k}\Big)$$

$$= \sum_{k_0}^{\infty} \operatorname{Re} a_{n_k} + i \sum_{k_0}^{\infty} \operatorname{Im} a_{n_k} = \operatorname{Re} \sum_{k_0}^{\infty} a_k + \operatorname{Im} i \sum_{k_0}^{\infty} a_k = \sum_{k_0}^{\infty} a_k.$$

$\square$

4.5. Proposición. Criterio de la Razón (d'Alembert) Sean $a_k \in \mathbb{C}$. Sea $(\forall k)\ |a_{k+1}/a_k| \leq r < 1$. Entonces $\sum a_k$ es absolutamente convergente.

Demostración. $|a_k| \leq r^{k-k_0}|a_0|$, $\sum |a_k|$ converge por comparación con $\sum(|a_0|/r^{k_0})r^k$. $\square$

La hipótesis puede expresarse $\limsup \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, donde

$$\limsup_k r_k = \lim_{N\to\infty} (\sup\{r_k :\ k \geq N\})$$

cuando $r_k \in \mathbb{R}$. (No es suficiente $\limsup |a_{k+1}/a_k| \leq 1$.)

Proposición. Criterio de la n-ésima raíz (Cauchy). Sean $a_k \in \mathbb{C}$. Sea $(\forall k)\ |a_k|^{1/k} \leq r < 1$. Entonces $\sum a_k$ es absolutamente convergente.

Demostración. $|a_k| \leq r^k$, $\sum |a_k|$ converge por comparación con $\sum r^k$. $\square$

La hipótesis puede expresarse $\limsup |a_k|^{1/k} < 1$.

RESULTADOS ADICIONALES SOBRE SERIES

4.6. En los siguientes resultados, $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{C}$. Se escribirá $a_k \uparrow L$ si $a_k \to L$ cuando $k \to \infty$ y $(\forall k)\ a_k \leq a_{k+1}$. Se escribirá $a_k \downarrow L$ cuando $-a_k \uparrow -L$.

Proposición. (Desigualdad de Abel) Sea $M \in \mathbb{R}$. Supóngase que $a_k > 0$, $a_k \downarrow \inf a_k$, $(\forall N)\ \left|\sum_{k=1}^{N} b_k\right| \leq M$. Entonces

$$(\forall N)\ \left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right| \leq M a_1.$$

Demostración. Escríbase $B_N = \sum_1^N b_k$ (así $B_0 = 0$). Luego

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{N} a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N-1} a_k B_k + a_N B_N\right) - \sum_{2}^{N} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_N B_N,\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right| &\overset{|B_k|\leq M}{\leq} M\left(\sum_{k=1}^{N-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_N|\right) \\ &\overset{a_k\geq 0}{=} M\left(\sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) + a_N\right) = Ma_1. \quad \square\end{aligned}$$

<u>Proposición.</u> (Criterio de Dirichlet) Sea $M \in \mathbb{R}$. Supóngase que $a_k \downarrow 0$, $(\forall N)$ $\left|\sum_{1}^{N} b_k\right| \leq M$. Entonces $\sum a_k b_k$ converge.

<u>Demostración.</u> Nótese que $|\sum_{N_1}^{N_2} b_k| \leq 2M$. Por la Desigualdad de Abel, $|\sum_{N_1}^{N_2} a_k b_k| \leq 2Ma_{N_1}$. De esto $\{\sum_{1}^{N} a_k b_k\}_{N=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, y por tanto converge. $\square$

<u>Corolario.</u> Si $a_k \downarrow 0$, entonces $\sum (-1)^k a_k$ converge. (serie <u>alternante</u>)

<u>Proposición.</u> (Criterio de Abel) Sea $L \in \mathbb{R}$ tal que $a_k \uparrow L$ ó $a_k \downarrow L$ cuando $k \to \infty$, y supóngase que $\sum b_k$ converge. Entonces $\sum a_k b_k$ converge.

<u>Demostración.</u> Digamos $a_k \uparrow L$. Así $L - a_k \downarrow 0$, luego por el criterio de Dirichlet, $\sum (L - a_k) b_k$ converge. También $\sum L b_k = L \sum b_k$ converge. Por eso, $\sum a_k b_k = \sum L b_k - \sum (L - a_k) b_k$ converge. Si al contrario $a_k \downarrow L$, entonces $-a_k \uparrow -L$, luego $\sum (-a_k) b_k$ converge. $\square$

4.7. Recordemos que f es <u>continua</u> si $(\forall z_0)$ $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Hay dos formas equivalentes de entender $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$:

(I) Cada vez que $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, se tiene $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = L$;

(II) $(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)\ f(B_\delta(z_0)) \subseteq B_\epsilon(L)$.

Consideremos una sucesión $\{f_n\}$ de funciones, no necesariamente continuas. Decimos que $f_n \to f$ <u>puntualmente</u> si $(\forall z)\ \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$. Eso es,

$$(\forall z)(\forall\epsilon)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)\ f_n(z) \in B_\epsilon(f(z)).$$

Se dice que $f_n \to f$ <u>uniformemente</u> si

$$(\forall\epsilon)(\exists n_0)(\forall z)(\forall n \geq n_0)\ f_n(z) \in B_\epsilon(f(z)).$$

(Para este concepto no importa en qué conjunto están definidas las funciones, con tal que sea el mismo para todas.)

Volvamos a funciones en dominios de $\mathbb{C}$.
<u>Proposición.</u> $f_n \to f$ uniformemente, $(\forall n)\ f_n$ continua $\implies$ f continua.

<u>Proposición.</u> (Prueba-M de Weierstrass). Supóngase que $(\forall k)(\forall z)\ |f_k(z)| \leq M_k$, además $\sum M_k < \infty$. Entonces la serie $\sum f_k(z)$ converge uniformemente en z, y para cada z converge absolutamente:

$$\sum_{k_0}^{n} f_k(z) \to f(z) \text{ uniformemente (en } z\text{) cuando } n \to \infty.$$

VARIABLE COMPLEJA #5

SERIES DOBLES

5.1. <u>Definición.</u> El <u>producto de Hadamard</u> de las series $\sum a_k$, $\sum b_k$ es la serie $\sum c_k$ donde $c_k = a_k b_k$, es decir la serie $\sum a_k b_k$.

<u>Definición.</u> El <u>producto de Cauchy</u> de las series $\sum a_k$, $\sum b_k$ es la serie $\sum c_n$ donde

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j+k=n} a_j b_k.$$

Definición. $\sum_{j,k\geq 0} a_{jk} = L$ significa $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)$

$$\Big| \sum_{\substack{0\leq j\leq n\\ 0\leq k\leq n}} a_{jk} \; - \; L \Big| < \epsilon.$$

A veces se escribe $\sum\sum a_{jk}$. (Aquí se ha evitado escribir $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$ porque sugeriría que hay que sumar sobre k para cada j fijo, que es otro concepto.)

Para las sumas dobles convergentes,

$$\sum_{j,k\geq 0} (a_{jk} + b_{jk}) = \sum_{j,k\geq 0} a_{jk} + \sum_{j,k\geq 0} b_{jk}.$$

5.2. Definición. Un reordenamiento de $\sum a_{jk}$ es $\sum a_{p_{jk}q_{jk}}$ donde $(j,k) \mapsto (p_{jk}, q_{jk})$ es una biyección de $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ sobre sí mismo.

Definición. Una sucesión $\{I_n\}$ de conjuntos de pares $I_n \subseteq \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$, tales que (i) cada I_n es finito, (ii) $I_n \subsetneqq I_{n+1}$ y (iii) $\bigcup_n I_n = \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ se llamará una sucesión de bloques de índices.

Nota. Si $I \subseteq \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ es finito, entonces $(\exists n)\, I \subseteq I_n$.

Ejemplo. El *bloque cuadrado* $I_n = \{(j,k)\colon\; j,k \leq n\}$.
El *bloque circular* $I_n = \{(j,k)\colon\; j^2 + k^2 \leq n^2\}$.
El *bloque triangular* $I_n = \{(j,k)\colon\; j + k \leq n\}$.

Cada sucesión de bloques de índices crea una sucesión $\{\sum_{(j,k)\in I_n} a_{jk}\}_n$.

La definición de convergencia de la serie doble $\sum a_{jk}$ es equivalente a la convergencia de la sucesión correspondiente al sistema de bloques cuadrados $\{I_n\}$:

$$\sum_{j,k\geq 0} a_{jk} = \lim_{n\to\infty} \sum_{I_n} a_{jk} \quad (I_n \text{ cuadrados}).$$

Proposición. $0 \leq b_{jk} \leq a_{jk}$, $\sum_{j,k} a_{jk}$ convergente $\implies$ $\sum_{j,k} b_{j,k}$ convergente, $\sum_{j,k} b_{j,k} \leq \sum_{j,k} a_{j,k}$.

Demostración. Aplicar el resultado para series de un índice a $\sum_{I_n} b_{jk} \leq \sum_{I_n} a_{jk}$. $\square$

Proposición. $I'_n \subseteq I_n \implies \sum_{I'_n} |a_{jk}| \leq \sum_{I_n} |a_{jk}|$.

Definición. Una sucesión de bloques de índices $\{J_n\}$ es una sucesión de bloques lineal si $\#J_n = n$. (Así $\#(J_n \setminus J_{n-1}) = 1$ para todo $n \geq 1$.)

Nota. Se puede definir un sistema de bloques lineal a partir de cualquier biyección $\mathbb{Z}_0^+ \to \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$, $n \mapsto (j_n, k_n)$, poniendo $J_n = \{(j_l, k_l)\colon\ l \leq n\}$. Todo sistema de bloques lineal se obtiene así: definir $(j_n, k_n) =$ único elemento de $J_n \setminus J_{n-1}$.

Lema. Para cualquier sucesión de bloques de índices $\{I_n\}$ hay un sistema de bloques lineal $\{J_m\}$ que tiene una subsucesión $\{J_{m_n}\}$ tal que $I_n = J_{m_n}$ para todo n.

Demostración. Definimos $m_n = \#I_n$. Ordenamos I_0 y todos los $I_n \setminus I_{n-1}$ de forma arbitraria. Ponemos $J_0 = \{1^{\text{er}}$ elemento de $I_0\}$, luego agregamos los elementos de I_0 uno por uno en orden, formando

$$J_0 \subseteq J_1 \subseteq \cdots \subseteq J_{m_0} = I_0.$$

Luego agregamos los elementos de $I_1 \setminus I_0$ en orden, definiendo

$$J_{m_0} \subseteq J_{m_0+1} \subseteq \cdots \subseteq J_{m_1} = I_1,$$

etc. Técnicamente,

$$J_m = J_{m-1} \cup \{(m - m_n)\text{-ésimo elemento de } I_{m_n} \setminus I_{m_{n-1}}\}$$

donde $m_n < m \leq m_{n+1}$. $\square$

Definición. $\sum a_{jk}$ converge absolutamente si $\sum |a_{jk}|$ converge.

Proposición. Sean $a_{jk} \in \mathbb{C}$, y sea $\sum a_{jk}$ absolutamente convergente. Entonces $\sum a_{jk}$ es convergente, y la suma sobre cualquier sucesión de bloques de índices, así como todo reordenamiento $\sum a_{p_{jk}q_{jk}}$, converge al mismo valor.

Demostración. Sea $\{I_n\}$ = sistema de bloques cuadradados. La hipótesis es que $\sum_{I_n} |a_{jk}|$ converge. Tomemos una sucesión lineal $\{J_m\}$ con $J_{m_n} = I_n$.

Los números $\sum_{J_m} |a_{jk}|$ crecen con m. Puesto que $n \leq m_n$ (propiedad de cualquier indexación de subsucesión), tenemos $J_n \subseteq J_{m_n} = I_n$, luego

$$\sum_{J_n} |a_{jk}| \leq \sum_{I_n} |a_{jk}|$$

lo cual converge. Tomemos una bijección $l \mapsto (j_l, k_l)$ tal que $J_n = \{(j_l, k_l)\colon \; l \leq n\}$. Esto dice que

$$\sum_{J_n} |a_{jk}| = \sum_{l=0}^{n} |a_{j_l k_l}|$$

que es una sumatoria con un sólo índice y hemos verificado que es acotada. Por lo tanto la sumatoria $\sum_l a_{j_l k_l}$ es absolutamente convergente, y entonces es convergente: $L = \sum_l a_{j_l k_l}$. Esto lo podemos escribir como

$$\sum_{J_n} a_{jk} \to L \quad \text{ cuando } n \to \infty.$$

Pasamos a una subsucesión, tiene el mismo límite:

$$\sum_{I_n} a_{jk} = \sum_{J_{m_n}} a_{jk} \to L.$$

Por definición de sumatoria (que se basa en bloques cuadrados), esto dice

$$\sum_{j,k} a_{jk} = L.$$

Ahora que sabemos que la serie doble converge, consideremos dos sucesiones de bloques $\{I_n\}$, $\{I'_n\}$. Son subsucesiones de dos sucesiones lineales, $I_n = J_{m_n}$, $I'_n = J'_{m'n}$. Las sucesiones lineales J_m, J'_m convierten las sumatorias correspondientes en sumatorias simples S, S' de un índice por medio de biyecciones, y la composición de una biyección con la inversa de la otra muestra que S' es un reordenamiento de S; por la convergencia absoluta tienen la misma suma. Las sumatorias $\sum_{I_n} a_{jk}$ y $\sum_{I'_n} a_{jk}$ son subsucesiones, y por ende tienen el mismo límite también.

Ahora consideremos un reordenamiento (p_{jk}, q_{jk}). Los bloques

$$I'_n = \{(p_{j_l,k_l}, q_{j_l,k_l}\colon \; l \leq n\}$$

definen la suma reordenada

$$\sum_{j,k} a_{p_{jk} q_{jk}} = \sum_{(p,q) \in I'_n} a_{pq}$$

y por ser suma sobre otros bloques, el reordenamiento da la misma suma. $\square$

5.3. Proposición. Si $\sum a_j$, $\sum b_k$ convergen absolutamente, entonces la sumatoria doble $\sum_{jk} a_j b_k$ también converge absolutamente, y

$$\sum_{j,k\geq 0}^{\infty} a_j b_k = \left(\sum_0^{\infty} a_j\right)\left(\sum_0^{\infty} b_k\right).$$

Por lo tanto el producto de Cauchy también converge absolutamente, y a la misma suma:

$$\sum_n \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k\right) = \left(\sum_0^{\infty} a_j\right)\left(\sum_0^{\infty} b_k\right).$$

Demostración. Para $\{I_n\}$ los bloques cuadrados,

$$\sum_{I_n} |a_j b_k| = \left(\sum_0^{n} |a_j|\right)\left(\sum_0^{n} |b_k|\right) \to \left(\sum_0^{\infty} |a_j|\right)\left(\sum_0^{\infty} |b_k|\right)$$

cuando $n \to \infty$. Por la Proposición anterior, $\sum a_j b_k$ es absolutamente convergente. Así calculamos su suma como un límite,

$$\sum_{I_n} a_j b_k = \left(\sum_0^{n} a_j\right)\left(\sum_0^{n} b_k\right) \to \left(\sum_0^{\infty} a_j\right)\left(\sum_0^{\infty} b_k\right)$$

El producto de Cauchy, es la sumatoria cuando $\{I'_n\}$ es la sucesión de bloques triangulares y la afirmación se sigue de la Proposición anterior.

5.4. Proposición. Supóngase que $\sum a_{jk}$ converge absolutamente. Entonces (i) para cada j la sumatoria $\sum_k a_{jk}$ converge absolutamente, (ii) la serie iterada

$$\sum_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}\right)$$

converge y su suma $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$ es igual a $\sum_{j,k\geq 0} a_{jk}$.

<u>Demostración.</u> Sea $I_k = \{\text{bloques cuadrados}\}$. Por la hipótesis de convergencia absoluta, para cada j tomamos n_j tal que para $n \geq n_j$,

$$\sum_{j,k\geq 0} |a_{jk}| - \sum_{I_n} |a_{jk}| \leq \frac{\epsilon/2}{2^{j+1}},$$

lo cual escribiremos como

$$\sum_{(I_n)^c} |a_{jk}| \leq \frac{\epsilon/2}{2^{j+1}}.$$

(i) Primero vemos que para $n \geq n_j$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq \frac{\epsilon/2}{2^{j+1}} \quad (*)$$

De hecho, $K \geq \max(n,k) \implies (n,k) \in I_K$, luego para tales K,

$$\sum_{k=0}^{K} |a_{n,k}| \leq \sum_{I_K} |a_{n,k}| \leq \sum_{\jmath,k\geq 0} |a_{jk}| \leq \frac{\epsilon/2}{2^{j+1}},$$

por lo que $(*)$ se tiene. De $(*)$ se sigue que $\sum_k a_{jk}$ converge absolutamente y podemos hablar de $\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$.
(ii) Ahora,

$$\sum_{j,k\geq 0} a_{jk} - \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} = \Big(\sum_{I_n} a_{jk} - \sum_{(I_n)^c} a_{jk}\Big) - \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{jk} + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{jk}\Big).$$

Dos de los términos se cancelan. Para $n \geq n_j$,

$$\Big|\sum_{j,k\geq 0} a_{jk} - \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}\Big| \leq \sum_{(I_n)^c} |a_{jk}| + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{jk}|$$

$$\leq \frac{\epsilon/2}{2^{j+1}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon/2}{2^{j}} < \epsilon.$$

Por lo tanto $\sum_{j,k\geq 0} a_{jk} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$. $\square$