

NÚMEROS COMPLEJOS

3.1. Queremos estudiar funciones en $\mathbb{R}^2$, sobre todo las conformes. En $\mathbb{R}^2$ hay una adición natural, $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$; falta una multiplicación.

Recordemos que si $f_1: D_1 \rightarrow D_2$, $f_2: D_2 \rightarrow D_3$ son diferenciables, y si $\gamma: (t_1, t_2) \rightarrow D_1$, entonces por la Regla de la Cadena

$$\begin{aligned}(f_2 \circ (f_1 \circ \gamma))' &= J_{f_2}((f_1 \circ \gamma)') \\ &= J_{f_2} \circ J_{f_1}(\gamma') \\ &= J_{f_2 \circ f_1}(\gamma').\end{aligned}$$

Supongamos que f_1, f_2 son conformes. Entonces

$$\begin{aligned}J_{f_2} &= \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}, \quad J_{f_1} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \\ J_{f_2 \circ f_1} &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

todos ellos elementos de Conf.

Observemos que la segunda columna duplica la información de la primera. Si $\gamma' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, entonces $(f_1 \circ \gamma)'$ es igual a

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a - b_1 b \\ a_1 b + b_1 a \end{pmatrix}.$$

Las matrices actúan sobre los vectores de la misma manera en que actúan sobre las primeras columnas. Por eso podemos definir

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

(“Completar el primer vector a una matriz; multiplicar.” O bien: “Completar ambos vectores a matrices; multiplicar, descartar la segunda columna del resultado.”)

Definición. *Números complejos.* $\mathbb{C}$ = el campo del cual el conjunto es $\mathbb{R}^2$, la suma “+” es la ordinaria y la multiplicación se define como “*” arriba.

$\mathbb{C}$ es isomorfo a Conf_0 : para definir el isomorfismo, el vector en $\mathbb{R}^2$ se pone en la primera columna y se completa la segunda columna de la única manera posible.

Podemos considerar a $\gamma', (f_1 \circ \gamma)', (f_1 \circ (f_2 \circ \gamma))', J_{f_1}, J_{f_2}, J_{f_2 \circ f_1}$ todos como números complejos. La Regla de la Cadena para derivadas se convierte en *multiplicación de complejos*.

$$(f_2 \circ f_1)'|_z = f_2'|_{f_1(z)} f_1'|_z \quad (f_2 \circ f_1)'(z) = f_2'(f_1(z)) f_1'(z)$$

3.2. Definición. Se usa la siguiente notación:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + bi, \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = bi.$$

En lugar de hablar del homomorfismo inyectivo $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}, a \mapsto \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, simplemente decimos que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ (Nueva definición de $\mathbb{R}$). Notemos que

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Definición. Para $a, b \in \mathbb{R}$, se escribe

$$\text{Re}(a + ib) = a, \quad \text{Im}(a + ib) = b,$$

$$\overline{a + ib} = a - ib \quad (\text{conjugado complejo}),$$

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{valor absoluto})$$

y cuando $a^2 + b^2 \neq 0$,

$$\arg(a + ib) = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

(argumento, definido módulo 2π , con el par de datos

$$\cos(\tan^{-1} \frac{b}{a}) = a/\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin(\tan^{-1} \frac{b}{a}) = b/\sqrt{a^2 + b^2}).$$

3.3. Frecuentemente usamos las letras $z = x + iy, w = u + iv$ para números complejos.

Proposición. $\bar{\bar{z}} = z, z\bar{z} = |z|^2, |\bar{z}| = |z|, |zw| = |z||w|, z + \bar{z} = 2 \text{Re } z,$

$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$, $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$. Si $z \neq 0$, $1/z = \bar{z}/|z|^2$,

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Proposición. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

- 3.4. El valor absoluto define una métrica $(z, w) \mapsto |z - w|$ en $\mathbb{C}$ de la misma manera que lo hace en $\mathbb{R}$.

Definición.

$$\begin{aligned} B_r(z) &= \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\} \\ \overline{B_r(z)} &= \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq r\} \\ \partial B_r(z) &= \{w \in \mathbb{C} : |w - z| = r\} \end{aligned}$$

Se verifica que $z_n \rightarrow z$, $w_n \rightarrow w \implies z_n + w_n \rightarrow z + w$, $z_n w_n \rightarrow zw$.

Proposición. $z_n \rightarrow z \iff (\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z)$.

Proposición. $\{z_n\}$ es de Cauchy $\iff \{\operatorname{Re} z_n\}, \{\operatorname{Im} z_n\}$ son de Cauchy $\iff \{z_n\}$ converge a un punto de $\mathbb{C}$.

- 3.5. Cuando $r = |z| > 0$, $\theta = \arg z$, tenemos $z = r \cos \theta + (r \operatorname{sen} \theta)i$. Además

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 \cos \theta_1 + (r_1 \operatorname{sen} \theta_1)i)(r_2 \cos \theta_2 + (r_2 \operatorname{sen} \theta_2)i) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + \\ &\quad r_1 r_2 (\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2)i \\ &= r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + r_1 r_2 \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)i. \end{aligned}$$

Esto nos dice $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$. (Pensar en la relación de esto con la multiplicación de matrices.) Se sigue por inducción que

$$z^n = (r \cos \theta + (r \operatorname{sen} \theta)i)^n = r^n \cos n\theta + (r^n \operatorname{sen} n\theta)i.$$

Esto dice cómo encontrar n -ésimas raíces: Para resolver $z^n = w$, debe ser $r^n = |w|$, así $r = \sqrt[n]{|w|}$. Además debe ser $\theta = \frac{1}{n} \arg w$. Para un valor fijo de $\arg w$, otros valores del argumento son

$$\arg w, \arg w + 2\pi, \arg w + 4\pi, \dots, \arg w + (n-1)2\pi.$$

Las n -ésimas partes son

$$\theta, \theta + \frac{2\pi}{n}, \theta + \frac{4\pi}{n}, \dots, \theta + \frac{n-1}{n}(2\pi).$$

Así cada $w \neq 0$ tiene n n -ésimas raíces.