VARIABLE COMPLEJA #1

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

1.1. Los matemáticos estudiamos muchas clases de funciones, entre ellas

$$\begin{aligned} \{0\} &\subseteq \{\text{constantes}\} \subseteq \{\text{lineales}\} \subseteq \{\text{polinómicas}\} \\ &\subseteq \{\text{algebraicas}\} \subseteq \{\text{analíticas}\} \subseteq C^\infty \subseteq \cdots \subseteq C^1 \subseteq \\ &\subseteq \{\text{abs. cont.}\} \subseteq \{\text{cont., variación acotada}\} \subseteq \{\text{continuas}\} \\ &\subseteq \{\text{Borel-medibles}\} \subseteq \{\text{Lebesgue-medibles}\} \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{R} \end{aligned}$$

Este curso se centra en las funciones analíticas. Es útil tener presente cómo se sitúan estas funciones entre las clases más generales y las más especiales.

Definición. Una función definida en un subconjunto de $\mathbb{R}$ se llama polinómica si existen $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ tales que el valor de la función es igual a $a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$ para cada x en el dominio. Una función es localmente polinómica si cada punto en su dominio tiene una vecindad en la cual la restricción de la función es polinómica.

Ejercicio. Toda función localmente polinómica $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es polinómica.

Este resultado implica que los valores de f en cualquier intervalo determinan los valores f en todo $\mathbb{R}$. Veremos que hay una afirmación similar para las funciones analíticas (= localmente serie de potencias), aunque no la hay para las clases más generales (de C^∞ en adelante).

FUNCIONES DIFERENCIABLES

Las funciones diferenciables son mucho más generales que las analíticas, y sus propiedades pueden ser útiles para nosotros.

1.2. Funciones C^1 en $\mathbb{R}$. Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $x_0 \in (a,b)$, entonces la derivada $f'(x_0)$ es un número real que satisface $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ (\forall x : |x - x_0| < \delta)$

$$|f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))| < \epsilon |x - x_0|.$$

En este sentido la función lineal-afín $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ puede considerarse como una aproximación a $f(x)$.

Funciones C^1 en $\mathbb{R}^2$. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio (subconjunto abierto y conexo). Sea $f\colon D \to \mathbb{R}^2$; entonces se puede escribir $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Sea f de clase C^1 (lo cual significa que u, v son diferenciables en cada variable cuando la otra variable queda fija). Abreviamos $u_x = \partial u/\partial x$, etc.

La derivada jacobiana de f en $(x,y) \in D$ es la función lineal $J_f|_{(x,y)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

Sea $(x_0, y_0) \in D$. Entonces $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ $(\forall x, y : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta)$

$$\begin{aligned} &|f(x,y) - (f(x_0,y_0) + J_f|_{(x_0,y_0)}(x - x_0, y - y_0))| \\ &\qquad < \ \epsilon(|x - x_0| + |y - y_0|). \end{aligned}$$

Esto significa que $f(x,y)$ se aproxima cerca de (x_0, y_0) por la transformación lineal-afín $f(x_0, y_0) + J_f|_{(x_0,y_0)}(x - x_0, y - y_0)$.

1.3. Una curva en D es una función continua $\gamma\colon (t_1, t_2) \to D$. Se puede escribir $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Cuando γ es de clase C^1, el vector tangente a γ en $t \in (t_1, t_2)$ (o "en $\gamma(t)$" cuando no haya ambigüedad) es $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$.
La Regla de la Cadena para composiciones $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dice lo siguiente.

Proposición. $(f \circ \gamma)'(t) = J_f|_{(x(t),y(t))}(\gamma'(t))$.

"La jacobiana de una transformación diferenciable lleva el vector tangente de una curva al vector tangente de la curva imagen."

(Lo mismo es válido en $\mathbb{R}^n$.)

1.4. Definición. La función diferenciable f es conforme en (x_0, y_0) si para cualesquier dos curvas suaves γ_1, γ_2 tales que $\gamma_1(0) = (x_0, y_0) = \gamma_2(0)$, se tiene

$$\text{ángulo}|_{(x_0,y_0)}(\gamma_1, \gamma_2) = \text{ángulo}|_{f(x_0,y_0)}(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2).$$

Se dice que f es <u>anticonforme</u> si los signos de los ángulos mencionados son opuestos.

Por la definición de “ángulo”, f es conforme en (x_0, y_0) precisamente cuando $J_f|_{(x_0,y_0)}$ es conforme en $(0,0)$. ¿Cuáles transformaciones lineales

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

son conformes?

<u>Proposición.</u> Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, existen $\alpha, \beta, r, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \quad (*)$$

La primera y la tercera matriz del lado derecho siempre son conformes; la segunda es conforme cuando $r = s$ (y anticonforme cuando $r = -s$).

<u>Proposición.</u> $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ es conforme $\iff a = d,\, b = -c,\, a^2 + b^2 \neq 0$.
$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ es anticonforme $\iff a = -d,\, b = c,\, a^2 + b^2 \neq 0$.

Una matriz conforme ó anticonforme puede escribirse respectivamente

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

que corresponden a $r = s$, $r = -s$ en $(*)$. Cuando $r = s$, las tres matrices que se multiplican en $(*)$ conmutan.

<u>Ejercicio.</u> La colección de matrices

$$\mathrm{Conf} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \; a, b \in \mathbb{R},\; a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

no es un grupo aditivo, pero la colección

$$\mathrm{Conf}_0 = \mathrm{Conf} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una subálgebra conmutativa del álgebra $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de las matrices 2 por 2 (o sea, cerrada bajo suma, resta y multiplicación, y por multiplicación por números reales). De hecho, Conf_0 *es un campo.*

Ejercicio. $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ es conforme o anticonforme $\Longleftrightarrow$ multiplica la longitud de todos los elementos de $\mathbb{R}^2$ por un mismo factor.

Ejercicio. Sea $L_\theta = \{(t\cos\theta, t\,\mathrm{sen}\,\theta) \colon\ t \geq 0\}$. Sea $\alpha(\theta)$= ángulo entre $T(L_0)$, $T(L_\theta)$, donde

$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Calcular $\alpha(\theta)$ en términos de a, b, c, d. Usar el resultado para dar otra demostración de la Proposición que caracteriza las matrices conformes.

1.5. Una $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 es conforme en (x_0, y_0) cuando $J_f|_{x_0,y_0} \in$ Conf. Esto es precisamente cuando: (a) $J_f|_{x_0,y_0} \neq 0$ y (b) f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0),

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Ejercicio. Sea f conforme en todo punto de D. Entonces f es invertible en una vecindad de cada $(x_0, y_0) \in D$ y la inversa local f^{-1} también es conforme.

1.6. Supongamos que f es de clase C^2 y que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto. Entonces

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= v_{yx} - v_{xy} = 0, \\ v_{xx} + v_{yy} &= -u_{yx} + u_{xy} = 0. \end{aligned}$$

Esto dice que u, v son armónicas, es decir $\Delta u = \Delta v = 0$, donde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

es el operador laplaciano.

Ejercicio. Sea $f\colon D \to D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ conforme en cada punto de D. Sea $\phi\colon D_2 \to \mathbb{R}$ armónica. Entonces $\phi \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ es armónica.

1.7. Dada u armónica, un problema importante es encontrar v armónica tal que u, v satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Tal v se llama conjugado armónico para u. Una fórmula para v es

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x_0,t)\,dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s,y)\,ds$$

pero estas integrales no estarán definidas si llegan a ocupar valores de u afuera de D. Entonces esta fórmula *no siempre es aplicable.*

Proposición. Sea D un disco. Entonces toda función armónica u en D admite un conjugado armónico v. La diferencia $v_2 - v_1$ de dos conjugados armónicos de u es constante.

VARIABLE COMPLEJA $\#2$

REPASO DE LOS NÚMEROS REALES

2.1. Se define $\mathbb{R}$ como un campo ordenado completo, donde

campo: tiene operaciones de adición, multiplicación que satisfacen las leyes comutativa, asociativa y distributiva, y tienen los inversos apropiados.

ordenado: tiene una relacion transitiva y antirreflexiva "$<$", tal que para cualesquier a, b distintos se tiene $a < b$ o $b < a$, y que respeta las operaciones en el sentido de que $a < b,\ c < d \implies a + c < b + d$; y $a < b,\ 0 < c \implies ac < bc$. Se definen $>$, $\leq$, $\geq$ de la forma obvia.

En cualquier campo ordenado hay una topología, donde se define $|a| = a$ cuando $a \geq 0$, $|a| = -a$ cuando $a < 0$. Ésta es una norma, y $(a, b) \mapsto |a - b|$ una métrica. Luego se define $\{x_n\} \to x$ cuando $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 > 0)\ n \geq n_0 \implies |x_n - x| < \epsilon$.

Se dice que $M \in \mathbb{R}$ es una cota superior para el subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ si $(\forall x \in E)\ x \leq M$.

completo: Cuando $E \neq \varnothing$ y E tiene una cota superior, E tiene una mínima cota superior M_0; es decir, para cualquier cota superior M de E, $M_0 \leq M$.

Se puede demostrar que todos los campos ordenados completos son isomorfos entre sí, así no importa cuál de ellos sea la definición para $\mathbb{R}$.

2.2. Cuando $E \neq \varnothing$ y E tiene una cota superior, la mínima cota superior se escribe $\sup E$. Se escribe $\sup \varnothing = -\infty$. Cuando E no tiene una cota superior, se escribe $\sup E = \infty$. Se escribe $\operatorname{ínf} E = -\sup(-E)$.

2.3. Proposición. $E \subseteq E' \implies \sup E \leq \sup E'$.

Proposición. Sea $\sup E \neq \pm\infty$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $x \in E$ tal que $x > \sup E - \epsilon$.

Proposición. Sea $E \neq \varnothing$. Entonces existe una sucesión creciente en E que converge a $\sup E$.

Proposición. Si $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x_n\uparrow$ (sucesión creciente) y $\{x_n\}$ es acotado superiormente, entonces existe un límite: $x_n \to \sup\{x_n\} = \operatorname{lím}_{n\to\infty} x_n$.

2.4. $\{x_n\}$ se llama una sucesión de Cauchy cuando $(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 > 0)$ $(\forall m, n \geq n_0)$ $|x_n - x_m| < \epsilon$.

Proposición. Toda sucesión de Cauchy en un campo ordenado completo es convergente.
(Esta es otra expresión de la completez.)