VARIABLE COMPLEJA
Lista A

(no para entregar)

PROBLEMAS SOBRE $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \overline{z}$

Notacion. $J_f = \text{matriz jacobiana} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ para $f(x,y) = u + iv$.

$D_\sigma(f)(z) = \text{derivada direccional (en la dirección } \sigma) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(z+t\sigma)-f(z)}{t}$.

f es (directamente) conforme cuando para todos $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$,
se tiene $\text{áng}\,(D_{\sigma_1}f, D_{\sigma_2}f) = \text{áng}\,(\sigma_1, \sigma_2)$. Es anticonforme cuando
$\text{áng}\,(D_{\sigma_1}f, D_{\sigma_2}f) = -\,\text{áng}\,(\sigma_1, \sigma_2)$.

---

1. (a) Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función $\mathbb{R}$-lineal. Demostrar que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $(\forall\, z \in \mathbb{C})$
$$T(z) = \alpha z + \beta \overline{z}, \tag{1}$$
y dichos α, β son únicos.

(b) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función real $\mathbb{R}$–diferenciable. Sea $z_0 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Encontrar números $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $(\forall\, dz = dx + idy \in \mathbb{C})$
$$J_f|_{z_0}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \alpha\, dz + \beta\, \overline{dz}.$$
(Que quede claro que dx, dy simplemente son números reales, éste no es problema de cálculo diferencial: se toma la jacobiana simplemente como una matriz dada.)
Lo anterior define las derivadas $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \alpha$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \beta$.

2. Sea $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ diferenciable, donde D es un dominio en $\mathbb{R}^2$.
(a) Sea $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Expresar la derivada direccional $D_\sigma f(z_0)$ en términos de $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$, σ.

(b) Sea $J_f \neq 0$. Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Igualando el ángulo $\text{áng}\,(D_{\sigma_1}f, D_{\sigma_2}f)$ con $\text{áng}\,(\sigma_1, \sigma_2)$ deducir que f es conforme $\iff$ $\partial f/\partial \overline{z} = 0$. Además, cuando $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ se tiene $\partial f/\partial z = f'$.

(c) Con las hipótesis de (b), igualando $|D_{\sigma_1} f|/|\sigma_1|$ con $|D_{\sigma_2} f|/|\sigma_2|$ deducir el resultado que f es conforme o anticonforme $\Leftrightarrow$ J_f magnifica todos los vectores por igual.

3. Demostar $\overline{\partial f}/\partial z = \overline{\partial f/\partial \overline{z}}$, $\partial\overline{f}/\partial\overline{z} = \overline{\partial f/\partial z}$, para una función f de clase C^1. (Esto puede escribirse como $\overline{w}_z = \overline{w_{\overline{z}}}$, $\overline{w}_{\overline{z}} = \overline{w_z}$.)

4. Demostrar la Regla de la Cadena para las derivadas $\partial/\partial z$, $\partial/\partial\overline{z}$:
si $f\colon D_1 \to D_2$, $g\colon D_2 \to D_3$ son de clase C^1, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z} &= \left(\frac{\partial g}{\partial w}\circ f\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\circ f\right)\frac{\partial \overline{f}}{\partial z},\\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial \overline{z}} &= \left(\frac{\partial g}{\partial w}\circ f\right)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\circ f\right)\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}.\end{aligned} \tag{2}$$

(Esto puede escribirse como $\zeta_z = \zeta_w w_z + \zeta_{\overline{w}}\,\overline{w}_z$, $\zeta_{\overline{z}} = \zeta_w w_{\overline{z}} + \zeta_{\overline{w}}\,\overline{w}_{\overline{z}}$.)

5. La laplaciana de una función $f\colon D \to \mathbb{R}$ o $f\colon D \to \mathbb{C}$ es $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$. (Es decir, ampliamos la definición a incluir a las funciones $\mathbb{C}$-valuadas.)
(a) Demostrar:

$$\frac{1}{4}\Delta f(z) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\, f = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\, f.$$

(b) Dar una nueva demostración del resultado previo de que si $f\colon D \to D'$ es holomorfa o antiholomorfa y $\phi\colon D' \to \mathbb{R}$ es armónica, entonces $\phi\circ f$ es también armónica.