

VARIABLE COMPLEJA

Lista 7

(entregar: 25 de octubre)

1. (a) Sea $X \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto cerrado y acotado. Sea $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Demostrar: f es uniformemente continua.
(b) Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ cerrados y acotados. Sea $g: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Demostrar: g es uniformemente continua.
2. Computar $\int_{\partial B_1(0)} |z - 1| |dz|$.
3. Descomponer el integrando de $\int_{\partial B_2(0)} \frac{dz}{z^2 + 1}$ en fracciones parciales, luego usar la Fórmula Integral de Cauchy para evaluar la integral.
4. Sea f holomorfa en el anillo $A_{R_1, R_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}: R_1 < |z - z_0| < R_2\}$. Sea $a_k = \int_{B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$ para $k \geq 0$.
(a) Demostrar que a_k no depende de r , donde $R_1 < r < R_2$.
(b) Demostrar que $\sum_0^\infty a_k (z - z_0)^k$ converge en $B_{R_2}(z_0)$.
5. (a) Verificar la formula $d(|z|^2) = 2\operatorname{Re}(\bar{z}dz)$.
(b) Sea γ una curva cerrada dentro de un dominio D donde la funcion f es holomorfa. Demostrar que $\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z) dz$ es imaginario.
6. Sea P un polinomio con coeficientes complejos. Sea $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Demostrar que

$$\int_{\partial B_R(a)} P(z) d\bar{z} = -2\pi i R^2 P'(a).$$

7. Demostrar que no existe una función holomorfa f en una vecindad de un punto $a \in \mathbb{C}$ tal que las derivadas satisfagan $|f^{(n)}(z)| > n!n^n$.