

VARIABLE COMPLEJA

Lista 3

(entregar: 29 de agosto)

1. Determinar cuáles de las siguientes series convergen, cuáles convergen absolutamente, y cuáles divergen (para las que tengan parámetros a, b, c , indicar para cuáles valores de éstas).

(a) $\sum \frac{a^k}{k!} \quad (a \in \mathbb{C})$

(b) $\sum \frac{k}{e^k}$

(c) $\sum \frac{a^{k^2}}{b^{ck}} \quad (a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$

(d) $\sum 2^k \operatorname{sen}(3^{-k}a) \quad (a \in \mathbb{R})$

(e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \cdots = \sum \frac{1}{a_k^k}, \quad a_k = \begin{cases} 2, & k \text{ impar} \\ 3, & k \text{ par} \end{cases}$

(f) $\sum \frac{1}{(\log k)^k}$

(g) $\sum \frac{1}{\log k} \operatorname{sen} ka$

(h) $\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} \right)$

(i) $\sum \frac{(k-a)^2}{(k-b)^3} \quad (a, b \in \mathbb{C})$

(j) $\sum \frac{i^k}{\sqrt{k}}$

(k) $\sum \frac{1}{k \log k}$

(l) $\sum \frac{1}{(\log k)^2}$

(m) $\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{a}{\log k} \right) \quad (a \in \mathbb{C})$

2. Sean $a_n \in \mathbb{C}$, $\sum a_n$ convergente. Demostrar: (a) $\sum n^{1/n} a_n$ converge, (b) $\sum (1 + 1/n)^n a_n$ converge.
3. Dar ejemplos de sucesiones $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ tales que $\{a_k\}$ converge y $\sum b_k$ converge, pero $\sum a_k b_k$ no converge.
4. Sea E cualquier conjunto, $a_k: E \rightarrow \mathbb{R}$, $b_k: E \rightarrow \mathbb{C}$ para $k = 1, 2, \dots$. Supóngase que $\sum_1^\infty b_k(x)$ converge uniformemente sobre $x \in E$ y que $\{a_k(x)\}$ es una sucesión monótona, uniformemente acotada sobre $x \in E$. Demostrar: $\sum_1^\infty a_k(x) b_k(x)$ converge uniformemente sobre $x \in E$.