

VARIABLE COMPLEJA

Lista 2

(entregar: 15 de agosto)

1. Sea $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Para θ fijo, escríbase $L_\theta = \{(t \cos \theta, t \sin \theta) : t \geq 0\}$. Calcular el ángulo entre $T(L_0)$ y $T(L_\theta)$ en $(0, 0)$, en términos de a, b, c, d, θ .
2. Sea $T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ una transformación lineal no-singular (i.e., $ad - bc \neq 0$). Demostrar que T es conforme o anticonforme si y sólo si multiplica las longitudes de todos los vectores por un mismo factor ($|T(v)|/|v|$ es constante).
3. $(\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}) \quad z_n \rightarrow \infty \iff (\operatorname{Re} z_n \rightarrow \infty \text{ o } \operatorname{Im} z_n \rightarrow \infty)$.
4. Sea f una función diferenciable en un dominio en \mathbb{C} , y conforme en el punto (x_0, y_0) . Demostrar que f es invertible cerca de (x_0, y_0) y que su inversa f^{-1} es conforme en el punto $f(x_0, y_0)$.
5. Sean D, D' dominios en \mathbb{C} , y sea $f: D \rightarrow D'$ una función inyectiva y conforme. Sea $\phi: D' \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica. Demostrar que la composición $\phi \circ f$ es también armónica. ¿Es cierto cuando f es anticonforme?
6. Demostrar que la suma de dos funciones conformes es conforme en todo punto que no es singular.
7. Encontrar el conjunto de puntos (x, y) donde la función $f(x, y) = (x^2 - y, x + y^2)$ sea conforme. Dibuje una representación gráfica del comportamiento de f cerca de $(x_1, y_1) = (1, 1)$, y de $(x_2, y_2) = (1, -1)$, junto con una gráfica de la aproximación lineal, de manera que ilustre qué tanto ésta es aproximación a aquella cerca de (x_i, y_i) . (Sugerencia: mostrar algún conjunto cerca de (x_i, y_i) y también su imagen, para cada caso.) .