VARIABLE COMPLEJA $\#15$

SINGULARIDADES ALGEBRAICAS

15.1. Sea $r_0 \in (0,1)$, y considérese la curva cerrada $\sigma(\theta) = r_0 e^{2\pi i\theta}$. Usaremos el hecho que cualquier curva cerrada en $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$ es homotópica a una potencia entera σ^m de σ, y que σ^m no es homotópica a $\sigma^{m'}$ en $\mathbb{D}^*$ para $m \neq m'$. (Esto se expresa diciendo que el *grupo fundamental* [=*grupo de Poincaré*] de $\mathbb{D}^*$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y que σ es un generador de este grupo. El isomorfismo está dado por $n(\gamma, 0)$.)

Comenzamos con un elemento de función $f_0 \in \mathbf{f}$, definida en una vecindad de $z_0 = r_0$. Hacemos una serie de definiciones para llegar a "singularidad algebraica".

(Con una transformación sencilla se podrá aplicar lo siguiente a f_0 definida en $B_\epsilon(p)$, $0 < r_0 < \epsilon$.)

15.2. Supongamos la primera condición:
(I) *f_0 admite continuación analítica sobre cualquier curva en $\mathbb{D}^*$.*

Pongamos $\mathbf{f}_0 \subseteq \mathbf{f}$ para la colección de todas las continuaciones analíticas de f_0 a lo largo de curvas en $\mathbb{D}^*$.

Consideremos las continuaciones analíticas de $[f_0]_{z_0}$ a lo largo de σ^m, una sucesión de gérmenes basados en z_0 (indexados por m). Estos gérmenes para $m > 0$ podrían ser todos distintos de $[f_0]_{z_0}$, pero vamos a suponer lo contrario:
(II) *Para algún $m > 0$, la continuación analítica de $[f_0]_{z_0}$ a lo largo de σ^m devuelve al germen original.*
Entonces ponemos

$$m_0 = \min\{m > 0\colon\ f_0 \text{ regresa sobre } \sigma^m \text{ al germen original}\}.$$

Ejemplo. Sea $f_0(z) = z^\alpha$. Entonces la condición (I) se satisface para $\alpha \in \mathbb{R}$, y la condición (II) se satisface para $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Ejemplo. Sea $f_0(z) = \log z$. Entonces la condición (I) se satisface, pero la condición (II) no se satisface.

Proposición. Si $m \in \mathbb{Z}$ es tal que f_0 regresa sobre σ^m al germen original, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = km_0$.

15.3. Ahora (suponiendo I, II) introducimos una variable auxiliar $t \in \mathbb{D}^*$ definida por $z = h(t) = t^{m_0}$.
Proposición. Existe una función $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D}^*)$ tal que $F(t) = f_0(t^{m_0})$ para t cerca de $t_0 = r_0^{1/m_0}$, y tal que $(\forall t_1 \in \mathbb{D}^*)$ $(\exists (f, D) \in \mathbf{f}_0)$ $t_1^{m_0} \in D$ y $F(t) = f(t^{m_0})$ para t cerca de t_1.

Hasta aquí sabemos que si f_0 regresa a la rama original después de dar m_0 vueltas alrededor de $z = 0$, la variable auxiliar t definida por $z = t^{m_0}$ permite representar esta rama de $\mathbf{f}$ como una función univaluada F en $\mathbb{D}^*$. Decimos que t es una variable uniformizadora para f_0 cerca de 0.

La noción de variable uniformizadora puede aclararse así: hay una pareja de funciones $z(t)$, $w(t)$ tales que $w(t) = f(z(t))$ para las diversas continuaciones f que conjuntamente se quieren "uniformizar". En el caso presente, se toma $z(t) = t^{m_0}$, $w(t) = F(t)$; así los pares $(z(t), w(t))$ son precisamente los pares $(z, f(z))$ para las diversas continuaciones analíticas f de f_0.

15.4. Puesto que F es holomorfa en $\mathbb{D}^*$, tiene una serie de Laurent $F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k t^k$ lo cual nos permite escribir

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k z^{k/m_0}.$$

Esta expresión se llama una serie de Puiseaux por tener potencias fraccionarias, con denominador fijo. No es una función univaluada de z pues depende de la elección de z^{1/m_0}. (Luego z^{k/m_0} significa la k-ésima potencia de esta elección.) Así es realmente una colección de m_0 funciones entrelazadas. Ahora podemos expresar la tercera condición:

(III) *La función uniformizadora F es meromorfa en $z = 0$.*

Definición. Cuando el germen $f_0 \in \mathbf{f}$ satisface las condiciones (I), (II), (III) y $m_0 > 1$, se dice que $\mathbf{f}$ tiene una singularidad tipo algebraico en $z = 0$.

(Cuando $m_0 = 1$ simplemente es una singularidad aislada, posiblemente removible.)

Ejemplo. $\sqrt[n]{z}$ tiene una singularidad tipo algebraico en $z = 0$; $\log z$ no tiene una singularidad tipo algebraico en $z = 0$.

En toda esta discusión el punto 0 no tiene nada de especial, para un $p \in \mathbb{C}$ general la variable uniformizadora local se definiría por $z = p + t^{m_0}$, con serie de Puiseaux $\sum_{-\infty}^{\infty} A_k(z-p)^{k/m_0}$.
En el punto $z = \infty$ se uniformiza con $z = t^{-m_0}$.

Ejemplo. $\sqrt[n]{z}$ tiene una singularidad tipo algebraico en $z = \infty$;
$\log z$ no tiene una singularidad tipo algebraico en $z = \infty$.

15.5. $\widehat{S}_{\mathbf{f}}$. Para cada singularidad tipo algebraico de $\mathbf{f}$ agregamos un punto nuevo a la superficie de Riemann $S_{\mathbf{f}}$ anteriormente construida para $\mathbf{f}$, y lo llamaremos un punto de ramificación de orden $m_0 > 1$. Este punto puede considerarse como una especie de "germen generalizado", siendo representado por la serie de Puiseaux $\sum_M^{\infty} A_k(z-p)^{k/m_0}$. Se observa que podría haber dentro de $\mathbf{f}$ otro germen $\tilde{f}_0$, cuya continuación alrededor del punto base diera su propio entero $\tilde{m}_0$ y así su propia serie de Puiseaux $\sum_M^{\infty} \tilde{A}_k(z-p)^{k/\tilde{m}_0}$. Esta serie sería un punto distinto a agregarse a $S_{\mathbf{f}}$.

Para $\sum_M^{\infty}$ con $M \geq 0$ se llama singularidad algebraica ordinaria (F es holomorfa); de otro modo la singularidad se llama polo algebraico (F tiene un polo).

Definición. La superficie de Riemann aumentada de $\mathbf{f}$ es

$$\widehat{S}_{\mathbf{f}} = S_{\mathbf{f}} \cup \{\text{singularidades de tipo algebraico}\}.$$

(Generalmente cuando se habla de "superficie de Riemann" de una función holomorfa, se refiere a la superficie aumentada.)

Una singularidad esencial de F no es una singularidad tipo algebraico de $\mathbf{f}$ y no se agrega ningún punto a $S_{\mathbf{f}}$ para ella. Pero $\widehat{S}_{\mathbf{f}}$ incluye todas las extensiones algebraicas al punto ∞ (incluyendo si no hay una ramificación, es decir cuando $m_0 = 1$).

Ejemplo. Para $f_0(z) = z^{1/n}$, las singularidades algebraicas están en $z = 0$ y $z = \infty$. Las variables uniformizadoras son $t^n = z$ y $t^{-n} = z$

respectivamente. La proyección $\widehat{S}_{\sqrt[n]{\ }} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es n-a-1 con excepción que sólo hay un punto que se proyecta al 0 y sólo un punto que se proyecta al ∞.

Volvamos a las superficies de Riemann.

15.6. Sea $f \in \mathcal{H}(S, \tilde{S})$ donde S, $\tilde{S}$ son superficies de Riemann (abstractas). Cabe mencionar que no tiene sentido hablar de "$f'(s)$" para $s \in S$ pues no se puede restar puntos en S (o medir sus distancias).

Proposición. Sea $f \in \mathcal{H}(S, \tilde{S})$, $s \in S$, $\tilde{s} = f(s) \in \tilde{S}$. Sea $\tilde{\varphi}\colon \tilde{U} \to \tilde{V}$ una carta de coordenadas en $\tilde{S}$ con $\tilde{s} \in \tilde{U}$. Entonces existe una carta de coordenadas $\varphi\colon U \to V$ en S con $s \in U$, y un entero $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^n$. El entero n es único.

Definición. El orden $\mathrm{ord}_s(f)$ de f en $s \in S$ es el número n descrito en la proposición anterior.

Nota. $\mathrm{ord}_s(f)$ puede describirse de la siguiente manera: sea $\tilde{\varphi}$ como en la proposición, y φ cualquier coordenada en s. Entonces $\mathrm{ord}_f(z)$ es el orden de la función holomorfa $\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi$ en el sentido ordinario, es decir, $\mathrm{ord}_f(s) = 1 +$ (el orden del cero de $(\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi)'$ en $\varphi(s)$).

15.7. Sea S una superficie (topólogica) compacta y orientable. La definición de "orientable" es muy técnica, esencialmente significa que localmente se puede tomar uno de los dos generadores ± 1 del grupo fundamental de una vecindad perforada, y luego al hacer algo análogo a la "continuación analítica" de este generador a lo largo de cualquier curva cerrada en S, este generador regresa al mismo signo. Para nosotros, baste saber que *toda superficie de Riemann es orientable.*

Proposición. (sin demostrar) S es homeomorfa a una superficie que construye de la siguiente manera: Sea P_g un polígono de $4g$ lados. Se etiquetan las aristas a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_2, b_2, a_2^{-1}, b_2^{-1}, $\ldots$ consecutivamente. Se define una relación de equivalencia en el polígono cerrado en el cual los puntos de a_j se identifican continuamente con los puntos de a_j^{-1} pero invertiendo la orientación, es decir, los puntos iniciales son identificados a los puntos finales y vice versa. Se hace lo mismo con b_j y b_j^{-1}.

En la construcción anterior, el espacio de identificación $P_g/{\sim}$ es una superficie (es localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^2$). Todos los vértices de P_g son identificados a un solo punto. Cada arista se proyecta a una curva cerrada basada en ese punto. El grupo fundamental de la superficie puede describirse algebraicamente como

$$\pi_1(S) \cong \langle a_1, a_2, \ldots, a_g, b_1, b_2, \ldots, b_g \colon \ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$$

Definición. El género de S es el número g de la construcción anterior. La característica de Euler es $\chi(S) = 2 - 2g$. (Nota. El género de una esfera es $g = 0$, la construcción de P_g tendría que adaptarse para este caso.)

Proposición. (sin demostrar) Sea S descompuesto como unión de "polígonos" acotados por arcos continuos con interiores disjuntos. Sean

$$\begin{aligned} n_0 &= \text{número de vertices} \\ n_1 &= \text{número de aristas} \\ n_2 &= \text{número de caras} \end{aligned}$$

en esta descomposición. Entonces

$$\chi(S) = n_0 - n_1 + n_2.$$

15.8. Ejemplo. En la construcción de $P_g/\!\sim$ se cuenta $n_0 = 1$, $n_1 = 2g$, $n_2 = 1$, luego $\chi(S) = 2 - 2g$.

Ejemplo. Sea S= superficie de Riemann para $w^2 = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$. Se calcula $n_0 = 8$, $n_1 = 14$, $n_2 = 6$, luego $\chi(S) = 0$, luego el género es $g = 1$. (Para justificar el razonamiento, ¡hay que verificar que la superficie es compacta!)

Ejemplo. Sea S= superficie de Riemann para $w^2 = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$ (a_j distintos). Cuando n es par hay dos puntos al infinito; cuando n es impar hay un punto al infinito con proyección 2-a-1 en cada vecindad perforada. El genero de S es $g = n/2 - 1$ cuando n es par; $g = (n+1)/2 - 1$ cuando n es par.

15.9. Sea $\pi \colon \tilde{X} \to X$ una función de un espacio topológico $\tilde{X}$ a otro X. Se dice que π es un recubrimiento (o espacio cubriente) si
(i) π es continua y sobre;

(ii) $(\forall x \in X)(\exists$ una vecindad U de $x)$ $(\forall$ componente conexa $\tilde{U}$ de $\pi^{-1}(U))$ $\pi|_{\tilde{U}} \colon \tilde{U} \to U$ es un homeomorfismo.

Ejemplo. $\exp_i \colon \mathbb{R} \to \partial B_1(0)$, $\exp_i(t) = e^{it}$, es un recubrimiento.
$\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$ es un recubrimiento.
$\exp_i|_{(-1,1)} \colon (-1,1) \to \partial B_1(0)$ no es un recubrimiento.
$(\ )^n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ no es un recubrimiento para $n > 1$.

Proposición. (sin demostrar) Sea $f \colon \tilde{S} \to S$ un recubrimiento. Entonces cada punto $s \in S$ tiene el mismo número de preimágines en $\tilde{S}$, que se llama el orden del recubrimiento f. (El orden podría ser infinito.)

Definición. Sean $\tilde{S}$, S superficies. Sea $f \colon \tilde{S} \to S$. Se dice que f es un recubrimiento ramificado si es posible remover un conjunto discreto $\tilde{E} = f^{-1}(E)$ de $\tilde{S}$ de manera que la restricción $f|_{\tilde{S}-\tilde{E}}$ es un recubrimiento de $S - E$, y si cerca de cada punto de $s \in E$, hay un número $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que f envía cada componente conexa de la preimagen de una vecindad perforada de s de una manera topológicamente equivalente a $z \mapsto z^n$.

Un recubrimiento es el caso especial del recubrimiento ramificado en que $E = \varnothing$.

Ejemplo. $(\ )^n \colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es un recubrimiento ramificado para $n > 1$.

Proposición. (sin demostrar) Toda función holormorfa no constante de una superficie de Riemann compacta a otra es un recubrimiento ramificado.

VARIABLE COMPLEJA #16

FUNCIONES ALGEBRAICAS

Ahora empezaremos un estudio detallado de las funciones algebraicas. Veremos que sus singularidades son de tipo algebraico. Además, en cierto sentido toda función que solamente tiene singularidades de tipo algebraico es una función algebraica.

16.1. Un función $f \in \mathcal{H}(D)$ es algebraica si satisface un polinomio notrivial $P(w,z)$, es decir, $P(f(z),z) = z$ para todo z. Una función analítica global es algebraica si alguno de sus elementos de función lo es.

Nota. Si algún elemento de función satisface un polinomio, entonces todas sus continuaciones analíticas satisfacen el mismo polinomio ("Principio de Permanencia de las Relaciones Algebraicas"). Si algún elemento de función satisface una ecuación diferencial, entonces todas sus continuaciones analíticas la satisfacen también.

Un polinomio en dos variables puede escribirse juntando cada potencia de una de las variables,
$P(w,z) = \sum_{j=0}^{n} a_j(z)w^{n-j} = a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_n(z)$
donde $a_j(z)$ son polinomios, $a_0 \neq 0$.

16.2. Escribimos $K[X]$ para el anillo de los polinomios, $K(X)$ para el campo de las funciones racionales en la variable X con coeficientes en un anillo o campo K. Sean $P(w,z), Q(w,z) \in \mathbb{C}[w,z]$ polinomios. Juntamos las potencias de w,

$$Q(w,z) = \sum_{j=0}^{m} b_j(z)w^{n-j}$$

con $b_0 \not\equiv 0$. Así pensando en P, Q como polinomios en $(\mathbb{C}(z))[w]$, el algoritmo de la división da

$$P(w,z) = q(w,z)Q(w,z) + r(w,z)$$

donde $q, r \in (\mathbb{C}(z))[w]$, con grado $\mathrm{gr}_w r \leq m-1$. Al limpiar las fracciones tenemos

$$c_0(z)P(w,z) = q_0(w,z)Q(w,z) + R_1(w,z)$$

donce c_0, q_0, R_1 son polinomios. Continuando, tenemos

$$\begin{aligned} c_0 P &= q_0 Q + R_1, \\ c_1 Q &= q_1 R_1 + R_2, \\ c_2 R_1 &= q_2 R_2 + R_3, \\ &\vdots \\ c_{s-1} R_{s-2} &= q_{s-1} R_{s-1} + R_s \end{aligned}$$

con $\mathrm{gr}_w R_j \leq m - j$, y donde $R_s \in \mathbb{C}[z]$ (es "constante en w" y se termina el proceso).

Definición. $R_s = R$ es el resultante de P y Q.

Proposición. Si tanto P como Q se anulan en (w_0, z_0), entonces su resultante se anula en z_0.

Supongamos ahora que P, Q son primos relativos. Entonces $R_s(z)$ no es identicamente cero (si lo fuera, entonces R_{s-1} y R_{s-2} tendrían un factor común irreducible porque tienen una factorización única en factores irreducibles, $c_{s-1}A_1A_2\cdots = q_{s-1}B_1B_2\cdots$). Luego R_{s-2} y R_{s-3} lo tendrían, etc., y también lo tendrían P y Q).

Cuando P, Q son primos relativos, su resultante puede escribirse $R = pP + qQ$ donde $p, q \in \mathbb{C}[w, z]$.

Definición. El discriminante de P es el resultante de P y su derivada $P_w = \partial P/\partial w$.

16.3. Sea P irreducible, $\mathrm{gr}_w P > 0$. Entonces P y P_w son relativamente primos (por tener P_w grado menor que P). Por lo tanto el discriminante de P no es idénticamente cero.

Proposición. El conjunto de puntos z_0 para los cuales la ecuación $P(w, z_0) = 0$ tiene raíces múltiples es finito.

(Una raíz múltiple es donde $P(w) = P_w(w) = 0$.)

16.4. Sea (f, D) algebraíca: existe P tal que $P(f(z), z) = 0$. Si $P = P_1P_2\cdots P_n$ es un producto de factores irreducibles, consideramos una sucesión $z_j \to z_0 \in D$, tiene que haber algún k con $P_k(f(z_j), z_j) = 0$ para una infinidad de j y por el Principio de la Identidad $P_k(f(z), z) = 0$.

Proposición. Una función algebraica satisface un polinomio irreducible, que es único hasta multiplicación por una constante.

16.5. Sea P irreducible, $P(w, z) = a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_n(z)$. Sea R el discriminante de P. Sea $E = \{z\colon\ a_0(z)R(z) = 0\} \cup \{\infty\}$ (el conjunto de puntos "posiblemente críticos"):

Proposición. Sea $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} - E$. Entonces existe un disco D_0 centrado en

z_0, y exactamente n elementos de función (f_1, D_0), (f_2, D_0),...,(f_n, D_0) tales que
(a) $P(f_i(z), z) = 0$ para todo $z \in D_0$, $i = 1, \ldots, n$;
(b) Las raíces distintas de $P(w, z_0) = 0$ en D_0 son $\{f_i(z_0) = w_i\}_{i=1}^n$;
(c) Si $z \in D_0$, $w \in \mathbb{C}$ y $P(w, z) = 0$, entonces existe i tal que $w = f_i(z)$.

Por eso, dado P, existen los (f_i, D_0) y podemos considerar la función analítica global generada por una sola de ellos. Cualquier función analítica global $\mathbf{f}$ que satisface P es construida de esta manera: se toma $z_0 \notin E$, y por (c) hay un f_i definida en una vecindad perforada de z_0, tal que $(f_i, D_0) \in \mathbf{f}$.

Nota. Aún no sabemos si todos los (f_i, D_0) pertenecen a una misma función analítica global. (Por ejemplo, las dos raíces cuadradas $\pm\sqrt{z}$ cerca de $z = 1$ son continuaciones analíticas una de la otra. ¿Siempre sucederá así?)

16.6. Proposición. Sea (f, D) tal que $P(f(z), z) = 0$ en $D \subseteq \mathbb{C}$. Entonces f admite continuación analítica a lo largo de cualquier curva en $\widehat{\mathbb{C}} - E$.

16.7. ¿Cómo son las singularidades de una función algebraíca? Ya sabemos que están en un conjunto finito $E \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$.

Sea $c_0 \in E$. En caso de que $c_0 \neq \infty$ tomaremos $D = B_\delta(c_0)$, y cuando $c_0 = \infty$ tomaremos $D = \{|z| > 1/\delta\} \cup \{\infty\}$.
Fijemos $z_0 \in D_0 = D \setminus \{c_0\}$. Tomemos una rama f_i cerca de z_0 que satisface $P(f_i(z), z) = 0$. Por la proposición anterior, se puede continuar f_i por toda curva en D_0. Tomemos $m_0 > 0$ tal que la continuación analítica de f_i por m_0 vueltas alrededor de c_0 rinde nuevamente f_i, con m_0 mínimo.

Caso I: $c_0 \neq \infty$, $a_0(c_0) \neq 0$. Tenemos

$$a_0(z) + \frac{a_1(z)}{f_i(z)} + \cdots + \frac{a_n(z)}{f_i(z)^n} = 0$$

donde f_i se representa por la serie de Puiseaux

$$f_i(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k (z - c_0)^{k/m_0}.$$

Si hubiese $k < 0$ con $A_k \neq 0$, entonces habría una sucesión $z_j \to c_0$ con $f_i(z_j) \xrightarrow{j} \infty$. Esto implica que $a_0(z_j) \to 0$, lo cual contradice la hypótesis de este caso. Por lo tanto c_0 es una singularidad algebraica ordinaria (f_i es una función holomorfa de $(z - c_0)^{1/m_0}$).

<u>Caso II: $c_0 \neq \infty$, $a_0(c_0) = 0$.</u> Sea $m > 0$ el orden del cero de a_0 en c_0, así $a_0(z)/(z - c_0)^m$ no se anula en z_0. Tenemos

$$\frac{a_0(z)}{(z-c_0)^m} + \frac{a_1(z)}{(z-c_0)^m f_i(z)} + \cdots + \frac{a_n(z)}{(z-c_0)^m f_i(z)^n} = 0.$$

El mismo razonamiento muestra que $(z - c_0)^m f_i(z)$ es acotada cerca de c_0 (si fuera no-acotada en una sucesión, entonces $f_i(z)$ sería no-acotada, luego también $(z - c_0)^m f_i(z)^j$ para cada j; luego $a_0(z)/(z - c_0)^m$ tendería a cero en c_0). Pongamos

$$F(t) = \sum A_k t^k = f_i(z), \quad t^{m_0} = z - c_0,$$

de manera que F es una función holomorfa (univaluada) de t para t pequeña, $t \neq 0$. Dado que $t^{mm_0} F(t) = (z - c_0)^m f_i(z)$ es acotada, se sigue que $A_k = 0$ para $k < mm_0$. Así F tiene (a lo sumo) un polo de orden no mayor que mm_0. En conclusión, f_i tiene (a lo sumo) un polo algebraico en c_0.

<u>Caso III: $c_0 = \infty$.</u> Escribimos $f_i(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k z^{k/m_0}$ en D. Sea $r_k = \mathrm{gr}_z a_k$. Tomemos $m > (r_k - r_0)/k$ para $k = 1, \ldots, n$. Si $z^m/f_i(z_j) \to 0$ para alguna sucesión $z_j \to \infty$, tendríamos tambien

$$\frac{z_j^{mk}}{f_i(z_j)^k} \to 0, \text{ luego } \frac{z_j^{r_k - r_0}}{f_i(z_j)^k} \to 0$$

para $k = 1, \ldots, n$. Entonces todos los términos de

$$\frac{a_0(z)}{z^{r_0}} + \frac{a_1(z)}{z^{r_0} f_i(z)} + \cdots + \frac{a_n(z)}{z^{r_0} f_i(z)^n} = 0$$

tenderían a 0 salvo el primero cuando $z = z_j \to \infty$, pues $a_k(z) \sim z^{r_k}$ por definición de r_k. Esto contradiría el hecho obvio que $a_0(z)/z^{r_0} \not\to 0$. En consecuencia $f_i(z_j)/z^m$ es acotada cuando $z \to \infty$, lo cual implica que f_i tiene a lo sumo un polo algebraico en c_0.

La conclusión es

<u>Teorema.</u> Todas las singularidades de una función algebraica son de tipo algebraico.

16.8. Teorema. La superficie de Riemann aumentada $\hat{S}_{\mathbf{f}}$ de una función algebraica $\mathbf{f}$ es compacta.

Corolario. log no es una función algebraica. Ninguna función holomorfa que tenga una singularidad esencial es algebraica.

Teorema. Sea $\mathbf{f}$ una función analítica global tal que $\hat{S}_{\mathbf{f}}$ es compacta. Entonces $\mathbf{f}$ es algebraica. De hecho, $\mathbf{f}$ satisface un polinomio cuyo grado no es mayor que el número de hojas del recubrimiento ramificado $\pi_{\mathbf{f}} \colon \hat{S}_{\mathbf{f}} \to \widehat{\mathbb{C}}$.

Corolario. Sea $P(w, z)$ un polinomio irreducible. Entonces todos los elementos de función que satisfacen P son continuaciones analíticas uno del otro (i.e., pertenecen a la misma función analítica global).

Nota. En un punto ramificado z_0, no todas las ramas de la función algebráica son continuaciones analíticas una de la otra *localmente*, es decir, a través de continuaciones en una vecindad de z_0.

Teorema. Sea $\mathbf{f}$ algebraica. Entonces toda función meromorfa $g \in \mathcal{M}(\hat{S}_{\mathbf{f}})$ definida en $\hat{S}_{\mathbf{f}}$ puede escribirse

$$g(s) = R_1(\pi_{\mathbf{f}})\rho_{\mathbf{f}}^{n-1} + R_2(\pi_{\mathbf{f}})\rho_{\mathbf{f}}^{n-2} + \cdots + R_{n-1}(\pi_{\mathbf{f}})\rho_{\mathbf{f}} + R_n(\pi_{\mathbf{f}})$$

donde las R_j son funciones racionales y n es el orden algebraico de $\mathbf{f}$. (Se omite la demostración.)

Ejemplo. Funciones elípticas. $P(z, w) = w^2 - 4z^3 + g_2 z + g_3 = w^2 - 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$ define una función global analítica $\mathbf{f}$. La fórmula $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ dice que localmente $\wp' \circ \wp^{-1}$ es un elemento de $\mathbf{f}$. Así $\pi \colon \widehat{S}_f \to \widehat{\mathbb{C}}$ es $\pi = \wp \circ (\widetilde{\wp}')^{-1}$:

$$\begin{tikzcd}
t \in E_0 \subseteq \mathbb{C} \arrow[r, "\widetilde{\wp}'"] \arrow[dr, "\wp"'] & \widehat{S}_{\mathbf{f}} \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\rho_{\mathbf{f}}"] & \\
& z \in \widehat{\mathbb{C}} & w \in \widehat{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}
\qquad \rho_{\mathbf{f}} \circ \widetilde{\wp}' = \wp'$$

Como π es 2-a-1, vemos que $\widetilde{\wp}'$ envía el paralelogramo básico E_0 exactamente 1 vez sobre $\widehat{S}_f$, salvo por la identificación de puntos opuestos en el perímetro ∂E_0.

Sea g elíptica con respecto a E_0. Por ser periódica, g induce una función $\tilde{g}\colon \widehat{S}_f \to \widehat{\mathbb{C}}$, es decir $\tilde{g} \in \mathcal{M}(\widehat{S}_f)$. El teorema (con $n = 2$) dice que

$$\tilde{g}(s) = R_1(\pi(s))\rho_{\mathbf{f}}(s) + R_2(\pi(s))$$

para funciones racionales R_1, R_2. De hecho, ya sabíamos que

$$g(z) = R_1(\wp(t))\wp'(t) + R_2(\wp(t)).$$

VARIABLE COMPLEJA $\#17$

PROBLEMA DE UNIFORMIZACIÓN

17.1. Dada una función analítica en un dominio D, nos gustaría poder describir todas sus continuaciones analíticas de una manera coherente. Tomemos como ejemplo

$$w = f(z) = \sqrt{1 - z^2}$$

(es decir, f satisface el polinomio $w^2 + z^2 - 1 = 0$). Podemos obtener puntos sobre esta curva mediante

$$z(t) = \cos t, \quad w(t) = \operatorname{sen} t.$$

Esta parametrización de la curva tiene dos inconvenientes: (1) no cubre el punto ∞; (2) hay muchos valores de t que representan una misma correspondencia local $z \mapsto w$.

Una mejor parametrización es

$$z(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad w(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

que no tiene estos inconvenientes.

17.2. Definición. Una uniformización de una función analítica f es un par de funciones $z(t), w(t)$ definidas para t en un mismo dominio $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ de manera que todas las continuaciones analíticas g de f se representan, en el sentido de que

$$w(t) = g(z(t))$$

para t en algún abierto dentro de U.

Recordemos las dos funciones en $\widehat{S}_{\mathbf{f}}$,

$$\begin{array}{ll} \text{la proyección} & \pi_{\mathbf{f}}\colon\ s \mapsto z, \\ \text{la realización} & \rho_{\mathbf{f}}\colon\ s \mapsto f(z). \end{array}$$

Sin embargo, no podemos tomar $z = \pi_{\mathbf{f}}$, $w = \rho_{\mathbf{f}}$ como una "uniformización" de f, porque si bien $\rho_{\mathbf{f}}(s) = g(\pi_{\mathbf{f}}(s))$ localmente, en general *no se puede considerar a $\hat{S}_{\mathbf{f}}$ como un subconjunto de $\widehat{\mathbb{C}}$.*

<u>Teorema.</u> (sin demostrar) Toda superficie topológica S admite una <u>recubrimiento universal</u>, $\sigma\colon \widetilde{S} \to S$, es decir σ es un recubrimiento y $\widetilde{S}$ es simplemente conexo.

(De hecho todo espacio topológico X que es conexo y semilocalmente simplemente conexo tiene un recubrimiento universal.)

<u>Ejemplo.</u> $\widehat{\mathbb{C}}$ es su propio recubrimiento universal. El toro $S_{\omega_1,\omega_2} = \mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z})$ tiene a $\mathbb{C}$ como recubrimiento universal.

17.3. Para resolver el problema de uniformización para una función analítica f:

1. Se forma la superficie de Riemann $\hat{S}_{\mathbf{f}}$ de todas las continuaciones analíticas de f y singularidades algebraicas;
2. Se forma el recubrimiento universal $\widetilde{S}_{\mathbf{f}}$ de $\hat{S}_{\mathbf{f}}$, con su proyección $\sigma\colon \widetilde{S}_{\mathbf{f}} \to \hat{S}_{\mathbf{f}}$;
3. Se define una estructura de superficie de Riemann en $\widetilde{S}_{\mathbf{f}}$ usando como coordenadas locales $z_\alpha \circ \sigma$;
4. Se aplica el Teorema de la Uniformización para obtener una biyección holomorfa $h : U \to \widetilde{S}_{\mathbf{f}}$ donde U es un dominio en $\widehat{\mathbb{C}}$.

<u>Teorema.</u> (de Uniformización) Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a una de las siguientes:

- $\widehat{\mathbb{C}}$ ("caso elíptico")
- $\mathbb{C}$ ("caso parabólico")
- $\mathbb{D}$ ("caso hiperbólico")

(Se omite la demostración.)

La *solución del problema de uniformización* está dada por

$$z = \pi_{\mathbf{f}} \circ \sigma \circ h,$$

$$w = \rho_{\mathbf{f}} \circ \sigma \circ h.$$

donde U es uno de $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$.

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[d, "h"'] \arrow[dddl, bend right=40, "z"'] \arrow[dddr, bend left=40, "w"] & \\
 & \widehat{S}_{\mathbf{f}} \arrow[d, "\sigma"'] & \\
 & S_{\mathbf{f}} \arrow[dl, "\pi_{\mathbf{f}}"'] \arrow[dr, "\rho_{\mathbf{f}}"] & \\
\widehat{\mathbb{C}} \arrow[rr, "f", "/" marking] & & \widehat{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$