VARIABLE COMPLEJA $\#13$

CONTINUACIÓN ANALÍTICA

13.1. Definición. Un elemento de función (analítica) es un par (f, D) formado de un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ y una función $f \in \mathcal{H}(D)$. Un elemento de función (f_2, D_2) se dice continuación analítica directa de (f_1, D_1) cuando $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$ y $f_1|_{D_1 \cap D_2} = f_2|_{D_1 \cap D_2}$.

Nota. $D_1 \cap D_2$ no tiene que ser conexo.

Decimos que dos elementos de función son equivalentes cuando existe una cadena de continuaciones analíticas directas

$$(f_0, D_0), (f_1, D_1), (f_2, D_2), \ldots, (f_n, D_n)$$

con (f_0, D_0), (f_n, D_n) los dos elementos de función bajo consideración.

Definición. La función analítica global $\mathbf{f}$ determinada por (f, D) es la clase de equivalencia de (f, D). (A veces se llama "función multivaluada".)

Nota. Cuando $D_1 \subseteq D$, la restricción $(f|_{D_1}, D_1)$ es una continuación analítica directa de (f, D).

Ejemplo. (i) Para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, los elementos de $\mathbf{f}$ corresponden a dominios en $\mathbb{C}$.
(ii) Para $f(z) = 1/z$, los elementos de $\mathbf{f}$ corresponden a dominios en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

13.2. La derivada $\mathbf{f}'$ está bien definida, así como el recíproco $1/\mathbf{f}$.

Decimos que $\mathbf{f}$ es subordinada a $\mathbf{g}$ cuando hay una asignación $\mu \colon \mathbf{f} \to \mathbf{g}$ tal que $\mu(f, D)$ tiene el mismo dominio D que (f, D), y tal que cada vez que (f_2, D_2) es una continuación analítica directa de (f_1, D_1), se tiene que $\mu(f_2, D_2)$ es una continuación analítica directa de $\mu(f_1, D_1)$. La subordinación permite definir las operaciónes aritméticas $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, $\mathbf{fg}$, aunque el resultado sale diferente para distintas subordinaciones.

Un polinomio aplicado a una función global, $P(\mathbf{f}) = \sum_0^n a_k \mathbf{f}^k$, siempre está bien definido.

13.3. Definición. Sea f definida en una vecindad de $p \in \mathbb{C}$. El germen de f en p es

$$\begin{aligned} [f]_p &= \{(g, D)\colon\ D \subseteq \mathbb{C},\ p \in D \\ &\qquad \text{y } f(z) = g(z) \text{ para todo } z \text{ en una vecindad de } p\}. \end{aligned}$$

Se refiere a cada elemento de $[f]_p$ como un representante del germen. ($[f]_p$ es el germen en p de cada uno de sus representantes.)

Nota. El concepto de germen es válido para todo tipo de funciones, pero solamente nos interesan funciones holomorfas.

Nota. Todo germen en p tiene un valor bien definido en p (valor común de todos los representantes del germen). Todo germen en p tiene una derivada, que también es un germen en p. Se pueden sumar y multiplicar gérmenes en p (sin preocuparnos de subordinaciones).

Nota. Cuando $p \neq q$, siempre $[f]_p \neq [g]_q$. (En particular $[f]_p \neq [f]_q$.)

Nota. Los gérmenes de funciones holomorfas en p corresponden a series de potencia convergentes centradas en p.

13.4. Sea $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ una curva.
Definición. Supóngase que para cada $t \in [0, 1]$ está asociado un elemento de función (f_t, D_t) de manera que
(i) $\gamma(t) \in D_t$;
(ii) $(\forall t_0)(\exists \delta)\ |t - t_0| < \delta \implies \gamma(t) \in D_{t_0}$ y $[f_t]_{\gamma(t)} = [f_{t_0}]_{\gamma(t)}$.
Entonces se dice que (f_1, D_1) es una continuación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de γ.

Proposición. El germen $[f_1]_{\gamma(1)}$ del elemento de función final (f_1, D_1) de una continuación analítica (cuando ésta existe) está determinado por el germen inicial $[f_0]_{\gamma(0)}$ y la curva γ.

Por eso se dice que $[f_1]_{\gamma(1)}$ (cuando existe) es la continuación analítica de $[f_0]_{\gamma(0)}$ a lo largo de γ.

Proposición. El radio de convergencia $r(t)$ de la serie de potencias del germen de f_t en $\gamma(t)$ es o bien identicamente ∞ o bien una función continua (finita) de t.

13.5. Teorema. (de Monodromía) Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, sea $z_0 \in D$, y sea $\xi = [f]_{z_0}$ un germen de función holomorfa en z_0. Supóngase que ξ admite continuación analítica sobre toda curva en D que inicia en z_0. Supóngase que γ_0, γ_1 son curvas en D que comienzan en z_0 y terminan en z_1, y además $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ en D respecto a extremos fijos. Entonces las continuaciones analíticas de ξ a lo largo de γ_0, γ_1 coinciden.

Cuando D es simplemente conexo, la hipótesis de homotopía se satisface automáticamente, luego *cada gérmen ξ en z_0 define una única función en $\mathcal{H}(D)$ cuyo germen en z_0 es ξ* ("función univaluada").

Cuando D no es simplemente conexo, curvas distintas pueden dar continuación de ξ a gérmenes distintos en z_1. Se dice que ξ determina una "función multivaluada".

Nota. Intentos de aplicar el Teorema de Monodromía a $\sqrt{z}$:
Si se toma $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces falla la hipótesis de $\gamma_1 \simeq \gamma_2$.
Si se toma $D = \mathbb{C}$, entonces falla la hipótesis de que la curva se continúe analíticamente sobre cualquier curva.

VARIABLE COMPLEJA #14

SUPERFICIES DE RIEMANN

14.1. Definición. Una superficie de Riemann concreta es un par (S, π) donde S es un espacio topológico de Hausdorff conexo, y $\pi\colon S \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una función continua con las siguientes propiedades: Hay un subconjunto $E \subseteq S$ de puntos aislados, tal que $\pi|_{S\setminus E}$ es un homeomorfismo local, mientras que para cada $\zeta_0 \in E$ existe una vecindad $V \subseteq S$ de ζ_0 y un homeomorfismo $h\colon V \to B_r(0)$ y un entero $n \geq 2$ tales que

$$\pi(\zeta) = \pi(\zeta_0) + (h(\zeta))^n$$

para $\zeta \in V$.
Decimos que para $\zeta_0 \in S \setminus E$, la función $z = \pi(\zeta)$ es una variable uniformizadora local cerca de ζ_0. Para $\zeta_0 \in E$, la función $t = h(\zeta)$ es una variable uniformizadora local cerca de ζ_0.

(Así una definición corta sería "Una superficie de Riemann concreta es un par (S, π) tal que todo $\zeta_0 \in S$ tiene una variable uniformizadora local".) Nótese que el número n está determinado por el punto $\zeta_0 \in S$, luego la colección $E \subseteq S$ de puntos ramificados está determinado.

14.2. Ejemplo. (1) $S = D \subseteq \mathbb{C}$, $\pi(z) = z$, $E = \varnothing$.

14.3. Definición. La unión disjunta de una familia de conjuntos X_α es

$$\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha \times \{\alpha\})\,.$$

Note que es subconjunto de $(\bigcup X_\alpha) \times \mathcal{A}$. Hay funciones inyectivas $\iota_\alpha \colon X_\alpha \hookrightarrow \bigsqcup X_\alpha$, las cuales permiten pensar en X_α como subconjunto de $\bigsqcup X_\alpha$; además, estas imágenes son disjuntas. A la unión disjunta $\bigsqcup X_\alpha$ se le asigna la máxima topología para la cual todas las inyecciones ι_α son continuas; así la vecindad de (x, α) en $\bigsqcup X_\alpha$ es de la forma $\{(y, \alpha)\}$ donde y varía sobre una vecindad de x en X_α.

14.4. (2) Sean γ_j ($j = 1, 2, 3$) las curvas $e^{2\pi i(t+(j-1)/3)}$ para $t \in [0, 1]$, cada una un tercio de $\partial B_1(0)$. Sean $U_j = \{z\colon\ \mathrm{dist}(z, \gamma_j) < 1/2\}$ ($j = 1, 2, 3$) vecindades tubulares de γ_j. Sea $X = \bigsqcup_{j=1}^{3} U_j$. Defínase una relación de equivalencia $\sim$ en X de la siguiente forma: $(z, 1) \sim (z, 2)$, $(z, 2) \sim (z, 3)$ (pero $(z, 1) \not\sim (z, 3)$ y $(z_1, j) \not\sim (z_2, j')$ cuando $z_1 \neq z_2$). Sea $S = X/{\sim}$ el espacio de identificación, con la proyección $\pi\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, $\pi[(z, j)] = z$. La topología en S es la mínima para la cual π es continua. En este ejemplo $E = \varnothing$.

Se puede considerar a S como un anillo $1/2 < |z| < 3/2$ en el cual el disco $B_{1/2}(1)$ "aparece dos veces". El círculo $\partial B_1(0)$ trazado desde $z = 1$ de uno de estos discos termina en el otro.

14.5. (3a) $X = \overline{P^+} \sqcup \overline{P^-} \sqcup \overline{P^+} \sqcup \overline{P^-}$, con la relación de equivalencia

$$(x, 1) \sim (x, 2),\ (-x, 2) \sim (-x, 3),\ (x, 3) \sim (x, 4),\ (-x, 4) \sim (-x, 1),$$

siempre con $x \geq 0$. La "superficie de Riemann para $\sqrt{}$ " es $S = X/\sim$. En este ejemplo $E = \{\mathbf{0}\}$ donde $\mathbf{0}$ significa el punto $\zeta_0 \in S$ tal que $\pi(\zeta_0) = 0$.

Observe que $\pi\colon S \to \mathbb{C}$ es 2-a-1 salvo que sólo hay un punto que es enviado a 0. Se puede definir la "raíz cuadrada" $\widetilde{\sqrt{}}\colon S \to \mathbb{C}$ de manera continua.

Una construcción similar produce la "superficie de Riemann para

$\sqrt[n]{\ }$".

(3b) ("Superficie de Riemann para log") Sea $P_0^\pm = P^\pm - \{0\}$,

$$X = \cdots \sqcup \overline{P_0^+} \sqcup \overline{P_0^-} \sqcup \overline{P_0^+} \sqcup \overline{P_0^-} \sqcup \cdots$$

y $S = X/\sim$ como antes. (No se obtendría una superficie de Riemann si se usara $P^\pm$ en lugar de $P_0^\pm$.)

(3c) ("Superficie de Riemann para $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$")
Sea $X_1 = (\overline{\widehat{P}^+} \sqcup \overline{\widehat{P}^-})/\sim$ donde la identificación $\sim$ pega los semiplanos superior e inferior a lo largo de $[-\infty, a]$, $[b, c]$, $[d, \infty]$. Se puede pensar en X_1 como un plano "cortado a lo largo de $[a, b]$ y $[c, d]$ y así que contiene dos copias de cada uno de estos dos intervalos. Escribiremos x^+, x^- para indicar dos elementos de X_1 que se proyectan a un mismo valor $x \in [a, b] \cup [c, d]$.
Sea $X_2 = X_1$. Finalmente sea $S = (X_1 \sqcup X_2)/(\overset{*}{\sim})$ donde la relación de equivalencia $\overset{*}{\sim}$ identifica $(x^+, 1) \overset{*}{\sim} (x^-, 2)$, $(x^+, 2) \overset{*}{\sim} (x^-, 1)$.

En este ejemplo $E = \{\pi^{-1}(a), \pi^{-1}(b), \pi^{-1}(c), \pi^{-1}(d)\}$ tiene cuatro puntos. Observar que $t = \sqrt{z-a}$ es una variable uniformizadora local en $\pi^{-1}(a)$ (más preciso: $t = h(\zeta) = \sqrt{\pi(\zeta) - a}$).

Este ejemplo contiene dos puntos al infinito: $\infty_1 \in X_1$ y $\infty_2 \in X_2$. En estos puntos tenemos $t = 1/z$ como variable uniformizadora local.

La función $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$ se define de manera inambigua en S.

(3c bis) Para $\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}$ se corta de e_1 a e_2 y de e_3 al ∞. La superficie de Riemann tiene ahora solamente un punto al ∞, y en ese punto π es ramificada de orden 2.

14.6. (4) Sea $\mathbf{f}$ cualquier función analítica global. (a) Defínase

$$S_{\mathbf{f}} = \left(\bigsqcup_{(f_\alpha, U_\alpha) \in \mathbf{f}} U_\alpha \right) / \sim$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ se define como sigue:

$$(z_\alpha, \alpha) \sim (z_\beta, \beta) \iff z_\alpha = z_\beta \text{ y } [f_\alpha]_{z_\alpha} = [f_\beta]_{z_\beta}.$$

(b) Se dice que dos gérmenes ζ_0, ζ_1 son equivalentes cuando hay una curva $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ tal que ζ_1 es la continuación analítica de ζ_0 a lo largo de γ. Defínase

$$S_\zeta = \{\zeta_1 \colon\ \zeta_1 \sim \zeta\}.$$

Los espacios $S_{\mathbf{f}}$, S_ζ son esencialmente lo mismos, salvo que la topología de $S_{\mathbf{f}}$ viene inmediatamente de la de unión disjunta y espacio de identificación, mientras que para S_ζ falta definirla. Una vecindad básica de $\zeta_0 \in S_\zeta$ es cualquier conjunto de la forma

$$\widetilde{U} = \{[f]_z \colon\ z \in U\}$$

donde U es el dominio de un representante de ζ_0.

Hay que verificar que es de Hausdorff. Hay que verificar que es conexo.
La proyección $\pi_{\mathbf{f}} \colon S_{\mathbf{f}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ se define por $\pi_{\mathbf{f}}([(z,\alpha)]) = z$.
La realización $\rho_{\mathbf{f}} \colon S_{\mathbf{f}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ se define por $\rho_{\mathbf{f}}([(z,\alpha)]) = f_\alpha(z)$.

Se ve que todos los ejemplos concretos construidos anteriormente corresponden exactamente a $S_{\mathbf{f}}$, π_f, ρ_f.

14.7. Definición. Una superficie de Riemann (abstracta) es un espacio de Hausdorff conexo S junto con un atlas holomorfo unidimensional máximo. Esto se define como sigue: Una carta de coordenadas es un par (U, z) donde $U \subseteq S$ es un abierto y $z \colon U \to z(U)$ es un homeomorfismo de U en un abierto $z(U) \subseteq \mathbb{C}$. Una colección $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ de cartas de coordenadas es un atlas holomorfo unidimensional si

$$z_{\beta\alpha} := z_\beta \circ z_\alpha^{-1} | z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \in \mathcal{H}(z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta))$$

cada vez que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$.

Nota. Todo atlas holomorfo queda dentro de un atlas holomorfo máximo de manera única. Este atlas holomorfo máximo se obtiene agregando todas las cartas de coordenas consistentes con el el atlas holomorfo original. (Hay que verificar que las cartas agregadas son consistentes entre sí.)

14.8. Ejemplo. (1) $S \subseteq \mathbb{C}$. (2) $S = \widehat{\mathbb{C}}$.
(Ambas con una estructura “natural”.)

14.9. Definición. $f \colon S \to \tilde{S}$ se dice holomorfa si

$$\tilde{z}_\beta \circ f \circ z_\alpha^{-1} \in \mathcal{H}(z_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(\tilde{U}_\beta)))$$

cada vez que $U_\alpha \cap f^{-1}(\tilde{U}_\beta) \neq \varnothing$.
Se escribe $\mathcal{H}(S, \tilde{S}) = \{f\colon S \to \tilde{S} \text{ holomorfa}\}$.

<u>Definición.</u> $\mathcal{H}(S) = \mathcal{H}(S, \mathbb{C})$; $\mathcal{M}(S) = \mathcal{H}(S, \widehat{\mathbb{C}})$.

14.10. (3) Sea $L_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ donde $\operatorname{Im} \tau > 0$.
Sea $S_\tau = \mathbb{C}/L_\tau$. (Toro de módulo τ.)
La proyección $\mathbb{C} \to \mathcal{S}_\tau$ es holomorfa.
Hay una correspondencia natural $\mathcal{M}(\mathcal{S}_\tau) \leftrightarrow \mathcal{E}\ell(1, \tau)$.

(4) $S =$ polihedro $\subseteq \mathbb{R}^3$.

(5) $S =$ cualquier superficie de Riemann concreta.

(Una superficie de Riemann concreta puede definirse como un par (S, π) donde S es una superficie de Riemann (abstracta) con proyección $\pi \in \mathcal{M}(S) \setminus \mathbb{C}$.)

14.11. <u>Nota.</u> $S_{\sqrt{\ }}$ es homeomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$, via $\widetilde{\sqrt{\ }}\colon S_{\sqrt{\ }} \to \widehat{\mathbb{C}}$.
$S_{\log}$ es homeomorfa a $\mathbb{C}$, via $\widetilde{\log}\colon S_{\log} \to \mathbb{C}$.
Estos homeomorfismos son de hecho biholomorfismos.

<u>Nota.</u> $S_{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}$ es una superficie de Riemann pues es una superficie de Riemann concreta. Es homeomorfa a un toro. ¿Es conformemente equivalente a alguna S_τ?

14.12. Se escribirá
$$\begin{tikzcd} S_{\mathbf{f}} \arrow[d, "\pi_{\mathbf{f}}"'] \arrow[dr, "\rho_{\mathbf{f}}"] & \\ \widehat{\mathbb{C}} \arrow[r, dotted, "\not{f}"'] & \widehat{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$
(y se dirá que $\rho_{\mathbf{f}}$ realiza a $\mathbf{f}$) para indicar que

(I) $(\forall (f, D) \in \mathbf{f})(\exists \widetilde{D} \subseteq S_{\mathbf{f}})\ \pi|_{\widetilde{D}}\colon \widetilde{D} \to D$ es un homeomorfismo y
$(\forall s \in \widetilde{D})\ f(\pi(s)) = \tilde{f}(s)$.

Podemos pedir también (II) $S_{\mathbf{f}}$ es una mínima superficie con esta propiedad (es decir, $\widetilde{D}$ es único).

<u>Ejemplo.</u> $S_{\sqrt[4]{\ }} \overset{\text{“}\widetilde{\sqrt{\ }}\text{”}}{\to} \widehat{\mathbb{C}}$ no es mínima porque tiene cuatro puntos sobre cada punto de $\widehat{\mathbb{C}}$ en lugar de 2.

Nota. Sea $(S_{\mathbf{f}}, \pi_{\mathbf{f}})$ la superficie de Riemann concreta para $\mathbf{f}$, con la función $\rho_{\mathbf{f}} \colon S_{\mathbf{f}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ que realiza $\mathbf{f}$. Entonces $(S_{\mathbf{f}}, \rho_{\mathbf{f}})$ es la superficie de Riemann concreta para $\mathbf{f}^{-1}$, y $\mathbf{f}^{-1}$ es realizada por $\pi_{\mathbf{f}} \colon S_{\mathbf{f}} \to \widehat{\mathbb{C}}$. En otras palabras, $S_{\mathbf{f}^{-1}} = S_{\mathbf{f}}$ y $\pi_{\mathbf{f}^{-1}} = \rho_{\mathbf{f}}$, $\rho_{\mathbf{f}^{-1}} = \pi_{\mathbf{f}}$.

Tanto $\pi_{\mathbf{f}}$ como $\rho_{\mathbf{f}}$ son funciones holomorfas en $S_{\mathbf{f}}$.

$$\begin{tikzcd}
 & S_{\mathbf{f}} \arrow[dl, "\rho_{\mathbf{f}}"'] \arrow[d, "\pi_{\mathbf{f}}"] \\
\widehat{\mathbb{C}} \arrow[r, dotted, "/" marking, "f^{-1}"'] & \widehat{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

14.13. Ejemplo.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{C}} \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\sqrt[n]{\ }}"] & \\
\widehat{\mathbb{C}} & \widehat{\mathbb{C}} \arrow[l, dotted, "(\ )^n"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{C}} \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\log}"] & \\
\widehat{\mathbb{C}} & \widehat{\mathbb{C}} \arrow[l, dotted, "\exp"]
\end{tikzcd}$$

14.14. Nota. La función $w = z^{1/n}$ es uniformizada por $z = t^n$, $w = t$.
La función $z = \log z$ es uniformizada por $z = \exp t$, $w = t$.
(Se explicará después más precisamente.)