VARIABLE COMPLEJA $\#12$

FUNCIONES ELÍPTICAS

12.1. Definición. Una integral elíptica es $\displaystyle\int_{t_0}^{t} R(\,t, \sqrt{Q(t)}\,)\,dt$ donde $R(t,u)$ es una función racional y $Q(t)$ es un polinomio de grado 3 ó 4. Es una integral elíptica de la primera especie cuando $R(t,u) = 1/u$, es decir

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{Q(t)}}.$$

12.2. Ejemplo. La lemniscata es parametrizada por

$$\begin{aligned} 2x^2 &= r^2 + r^4, \\ 2y^2 &= r^2 - r^4. \end{aligned}$$

La longitud de arco desde 0 a $(x(r), y(r))$ es $s(r) = \displaystyle\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$.

Proposición. (Fagnano 1718) $s(\dfrac{2r\sqrt{1-r^4}}{1+r^4}) = 2s(r)$.

Proposición. (Euler 1755) $s(\dfrac{r_1\sqrt{1-r_2^4} + r_2\sqrt{1-r_1^4}}{1+r_1^2 r_2^2}) = s(r_1)+s(r_2)$.

12.3. Ejemplo. Transformación conforme de un rectángulo. Pongamos $Q(t) = (t-a)(t-b)(t-c)(t-d)$ y supongamos $a < b < c < d$. Consideremos la integral elíptica

$$f(t) = \int_d^t \frac{dt}{\sqrt{Q(t)}}$$

para $\operatorname{Im} t \geq 0$. Se fija una rama de $\sqrt{Q(t)}$, digamos la positiva para $t > d$.

Es una fórmula de Schwarz-Christoffel ($\beta_k = 1/2$, $\alpha_k = 1/2$). Si empezáramos con un rectángulo como propuesta imagen de P^+, la transformación conforme sería de la forma dada para f. Aún con a, b, c, d

arbitrarios tenemos $\int_{-\infty}^{\infty} dt/|\sqrt{Q(t)}| < \infty$ (checar en $a, b, c, d, \pm\infty$) y que $\int_{B_R(0)} dt/|\sqrt{Q(t)}|, \int_{B_{1/R}(a)} dt/|\sqrt{Q(t)}| \to 0$ cuando $R \to \infty$.

Como en el análisis de la fórmula de Schwarz-Christoffel, cerca de $z = a$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{Q(t)}} = (t-a)^{1/2}(\text{holo}) = ((t-a)(\text{holo}))^{1/2}$$

(similar para b, c, d), luego f multiplica ángulos por $1/2$ cerca de a, b, c, d y los ángulos de π van a ángulos rectos.

De esto se deduce que $f\colon P^+ \to E_0$ donde ∂E_0 es un rectángulo. Además $f(z)$ traza ∂E_0 una vez cuando z recorre $\widehat{\mathbb{R}}$, por lo que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P^+} \frac{f'(t)}{f(t)-z_0}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E_0} \frac{dz}{z-z_0} = 1$$

para $z_0 \in E_0$, o sea e f es 1-a-1 (Principio del Argumento).

La continuación analítica de f alrededor de un pequeño círculo alrededor de uno de a, b, c, d devuelve -1 veces el valor original. Esto puede verse por reflexión por dos segmentos consecutivos entre $[-\infty, a]$, $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d]$, $[d, \infty]$, que corresponde a la reflexión en un lado de E_0 seguida de la reflexión en un lado de un rectángulo congruente contiguo. Sea

$$E = E_0 \cup \overline{E_0} \cup (-E_0) \cup (-\overline{E_0})$$

que es un rectángulo con base $\omega_1 = 2\int_d^a dt/\sqrt{Q(t)}$ y altura $\omega_2/i = (2/i)\int_a^b dt/\sqrt{Q(t)}$.

Proposición. Todas las funciones que se obtienen mediante un número par de reflexiones de f (en aristas de las copias de E) son de la forma

$$t \mapsto \pm f(t) + m\omega_1 + n\omega_2$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$.

Proposición. Si f_1 es obtenida de f mediante reflexiones y si $f_1(t_0) = f(t_0)$ para algún $t_0 \in P+$, entonces $f_1 = f$.
Si f_1, f_2 son dos tales funciones y si $f_1(t_1) = f_2(t_2) + m\omega_1 + n\omega_2$ para $t_1, t_2 \in P^+$, $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $t_1 = t_2$.

Teorema. La inversa $f^{-1}\colon E_0 \to P^+$ se extiende a una función meromorfa $g\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ que satisface la ecuación diferencial

$$g'(z)^2 = (g(z)-a)(g(z)-b)(g(z)-c)(g(z)-d).$$

TEORÍA GENERAL DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

12.4. Definición. Una función elíptica es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ que es doblemente periódica,

$$\mathcal{E}\ell(\omega_1,\omega_2) = \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})\colon\ \ f(z+\omega_1) = f(z) = f(z+\omega_2)\}$$

con $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$.

Nota. $\mathcal{E}\ell(\omega_1,\omega_2)$ es un campo, y cerrado bajo derivadas y bajo traslaciones de la variable.

Definición. Un paralelogramo básico es E_a = el paralelogramo con vertices $a, a+\omega_1, a+\omega_1+\omega_2, a+\omega_2$.

Nota. E_0 es la imagen del cuadrado con vertices en $0, 1, 1+i, i$ bajo la transformación real-lineal con matriz $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\omega_1 & \mathrm{Re}\,\omega_2 \\ \mathrm{Im}\,\omega_1 & \mathrm{Im}\ \ \omega_2 \end{pmatrix}$.

12.5. Proposición. Toda función elíptica holomorfa es constante: $\mathcal{E}\ell(\omega_1,\omega_2) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Proposición. Sea $f \in \mathcal{E}\ell(\omega_1,\omega_2)$. Entonces la suma de los residuos de f en E_a es cero. (Se supone que a es escogido de manera que ∂E_a no contenga polos de f.)

Proposición. Sea $f \in \mathcal{E}\ell(\omega_1,\omega_2)$. Entonces el número de polos de f en E_a es igual al número de ceros de f en E_a (contando multipliciades).

Proposición. Sea $f \in \mathcal{E}\ell(\omega_1,\omega_2)$. Entonces la suma de los polos de f en E_a es igual a la suma de ceros de f en E_a más un elemento de $\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$.

12.6. Hay dos maneras principales (de Jacobi, de Weierstrass) de construir funciones elípticas básicas, es decir, que generen todo $\mathcal{E}\ell(\omega_1,\omega_2)$.

Definición. La función $\wp$ de Weierstrass es

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left(\frac{1}{(z-(m\omega_1+n\omega_2))^2} - \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2} \right).$$

Nota. La sumatoria converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C} \setminus (\omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z})$ y se deduce que $\wp \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Claramente $\wp$ es una función par.

Proposición. $\wp'(z) = -2 \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-(m\omega_1+n\omega_2))^3}$.

Proposición. (i) $\wp \in \mathcal{E}\ell(\omega_1, \omega_2)$; (ii) $\wp$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus(\omega_1\mathbb{Z}\times\omega_2\mathbb{Z})$, y (iii) la serie de Laurent para $\wp$ en $z=0$ es de la forma

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 0 + O(z^2).$$

Además, $\wp$ es la única función con estas tres propiedades. En un paralelogramo básico E_a, la restricción $\wp\colon E_a \to \widehat{\mathbb{C}}$ es 2-a-1 (cuando los valores se cuentan de manera apropiada en ∂E_a).

12.7. Definición. Las series de Eisenstein $g_2 = 60 \sum' \omega^{-4}$, $g_3 = 140 \sum' \omega^{-6}$ (donde $\sum'$ significa que ω varía sobre $\omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z}-(0,0)$).

Proposición. $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + O(z^6)$.

Proposición. $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus (\omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z})$.

Nota. Esto dice que $z = z_0 + \int_{\wp(z_0)}^{\wp(z)} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$ donde la elección de $\pm\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}$ está determinada por el valor igual a $\wp'(z)$ correspondiente.

12.8. Definición. $e_1 = \wp(\omega_1/2)$, $e_2 = \wp(\omega_2/2)$, $e_3 = \wp(\omega_3/2)$ donde $\omega_3 = \omega_1+\omega_2$.

Proposición. $\wp(z)$ toma el valor e_j con multiplicidad dos en $(\omega_j/2) + (\omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z})$ y en ningún otro punto. Además, $e_i \neq e_j$ para $i \neq j$.

Corolario. $\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$.

Nota. $g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)$; $g_3 = 4e_1e_2e_3$.

Teorema. Para cada $f \in \mathcal{E}\ell(\omega_1, \omega_2)$ existe una función racional $R(X, Y)$ tal que $f = R(\wp, \wp')$. El campo $\mathcal{E}\ell(\omega_1, \omega_2)$ es isomorfo al cociente

$$\frac{\mathbb{C}(X, Y)}{(Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3)}.$$

donde el numerador es el campo de funciones racionales en dos variables X, Y y el denominador es la colección de todos los polinomios múltiplos de $Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3$.

Proposición. $\wp(z_1 + z_2) = -\wp(z_1) - \wp(z_2) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}\right)^2.$