VARIABLE COMPLEJA $\#7$

CONEXIDAD SIMPLE

7.1. X será un espacio topológico arco-conexo y localmente arco-conexo.

Definición. X es simplemente conexo si toda curva cerrada en X es homotópica a un punto relativo a extremos fijos.

Definición. X satisface la Propiedad de Extensión si toda función continua $\phi\colon \partial B_1(0) \to X$ puede extenderse a una función continua $\phi\colon \overline{B_1(0)} \to X$.

Nota. Conexidad simple y Propiedad de Extensión son propiedades topológicas (conservadas por homeomorfismos).

Proposición. X es simplemente conexo $\iff$
X satisface la Propiedad de Extensión.

Proposición. Sea X simplemente conexo. Sean $\gamma_0, \gamma_1\colon [0,1] \to X$ curvas con $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ ("comparten extremos"). Entonces $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ con respecto a extremos fijos.

7.2. Definición. Una 1-forma (diferencial) (real) ω es un par (p,q) de funciones reales (generalmente continuas o aún suaves). Se escribe $\omega = p\,dx + q\,dy$. Dada una función compleja $f = u + iv$, se escribe $f\,dz$ para la 1-forma compleja

$$\begin{aligned} f\,dz &= (u+iv)(dx + i\,dy) = (u+iv)dx + (-v+iu)dy \\ &= (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy) \end{aligned}$$

que es un par de 1-formas reales.

Definición. Dada una función real-valuada u diferenciable, su diferencial es la 1-forma

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy.$$

Para $f = u + iv$ compleja, su diferencial es $df = du + i\,dv$.

Definición. $\displaystyle\int_\gamma p\,dx + q\,dy = \int_0^1 (p(\gamma(t))x'(t) + q(\gamma(t))y'(t))\,dt$
donde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Definición. La 1-forma $\omega = p\,dx + q\,dy$ se llama cerrada si $q_x - p_y = 0$. La forma ω se llama exacta si existe u tal que $du = \omega$.

Lema. (a) ω exacta $\implies$ ω cerrada;
(b) ω cerrada en un disco $\implies$ ω exacta.

Lema. Sea $\omega = du$ en D. Sea $\gamma \subseteq D$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Entonces

$$\int_\gamma \omega = u(b) - u(a).$$

7.3. Proposición. Sean $\gamma_0, \gamma_1 \subseteq D$; sea ω una forma cerrada en D. Si $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ relativo a extremos fijos, entonces $\displaystyle\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

Corolario. Sea D un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$; sea ω una 1-forma cerrada en D. Si $\gamma_0, \gamma_1 \subseteq D$ comparten extremos, entonces $\displaystyle\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$. Si $\gamma \subseteq D$ es una curva cerrada, entonces $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$.

Teorema. Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ tal que toda 1-forma cerrada ω in D satisfaga $\int_\gamma \omega = 0$ para toda curva cerrada $\gamma \subseteq D$. Entonces
(a) Todo $u \in \operatorname{Ar} D$ tiene un conjugado armónico v.
(b) Si $f \in \mathcal{H}(D)$ no se anula, entonces existen $g, h \in \mathcal{H}(D)$ tales que $f = e^g$, $f = h^2$.
(c) Si $f \in \mathcal{H}(D)$ entonces existe $F \in \mathcal{H}(D)$ tal que $F' = f$.

VARIABLE COMPLEJA $\#8$

TRANSFORMACIÓN CONFORME

Escribimos $\mathbb{D} = B_1(0)$, $P^+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

8.1. Lema. (de Schwarz) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $f(0) = 0$. Entonces
(i) $(\forall z \in \mathbb{D})\ |f(z)| \leq |z|$;
(ii) $|f'(0)| \leq 1$.
(iii) Si existe $z_0 \neq 0$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$ o si $|f'(0)| = 1$, entonces $(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{D})\ f(z) = e^{i\alpha} z$.

8.2. Definición. Transformación conforme de D_1 en D_2 = función holomorfa y bijectiva de D_1 sobre D_2.

Definición.
$\operatorname{Aut} D = \{f \in \mathcal{H}(D)\colon\ f$ es una transformación conforme de D en $D\}$.

Proposición. $T \in \operatorname{Aut} \mathbb{D} \implies$ existen $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$,

$$T(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}.$$

$T \in \operatorname{Aut} P^+ \implies$ existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Teorema. (de transformación conforme de Riemann, o Riemann-Koebe)
Sea $D \subsetneq \mathbb{C}$. Supóngase que todo elemento de $\mathcal{H}(D)$ que no se anula tiene una raíz cuadrada. Entonces existe una transformación conforme $f\colon D \to \mathbb{D}$.

DOMINIOS HOMOLOGICALMENTE NULOS

8.3. Sea $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ una curva cerrada, y $z \notin \gamma$.
Definición. El índice de γ alrededor de z es

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Proposición. $n(\gamma, z)$ es un entero, y es constante cuando z varía en una componente conexa de $\mathbb{C} - \gamma$.

8.4. $\gamma \subseteq D$ curva cerrada.
Definición. γ es homológicamente nula en D si $(\forall z \notin D)\ n(\gamma, z) = 0$.
Definición. D es homológicamente nulo si toda curva cerrada en D es homológicamente nula.

Proposición. Simplemente conexo $\implies$ homológicamente nulo.

8.5. Sea $\sigma \subseteq \mathbb{C}$ un polígono cerrado (no necesariamente simple) con aristas horizontales y verticales. La colección de rectas que contienen las aristas de σ dividen a $\mathbb{C}$ en rectángulos R_i (y semibandas, agregamos unas rectas para que σ no pase cerca de una semibanda). Sea a_i el centro de R_i. Cualquier segmento τ de σ es una arista común de rectángulos contiguos R_i y R_j; supondremos que R_i está a la izquierda de o arriba de R_j. Orientamos a τ de manera que R_i está a su izquierda y R_j a su derecha.

Sea $c_\sigma(\tau)$ el número neto de veces que σ traza τ, es decir

$$\begin{aligned} c_\sigma(\tau) &= (\#\text{ veces que } \sigma \text{ traza } \tau \text{ positivamente}) \\ &\quad - (\#\text{ veces que } \sigma \text{ traza } \tau \text{ negativamente}). \end{aligned}$$

Lema. $n(\sigma, a_i) - n(\sigma, a_j) = c_\sigma(\tau)$.

Lema. Supóngase además que $\sigma \subseteq D$. Sea ω una 1-forma en D (no necesariamente cerrada). Entonces

$$\int_\sigma \omega = \sum_{i:\ n(\sigma, a_i) \neq 0} n(\sigma, a_i) \int_{\partial R_i} \omega.$$

Lema. Supóngase además que $\sigma \sim 0$ en D y que ω es una forma cerrada en D. Entonces $\int_\sigma \omega = 0$.

Teorema. D es simplemente conexo $\iff$ D es homológicamente nulo.

Teorema. D es homológicamente nulo $\iff$ $\widehat{\mathbb{C}} - D$ es conexo.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{l}D \text{ satisface} \\ \text{Propiedad de} \\ \text{la Extension}\end{array}} \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{\begin{array}{l}D \text{ sim-} \\ \text{plemente} \\ \text{conexo}\end{array}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{l}\int_\gamma \omega = 0 \\ \gamma, \omega \quad \text{ce-} \\ \text{rradas}\end{array}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \boxed{\begin{array}{l}f\colon D \to \\ \mathbb{C} - \{0\} \\ \exists\ g = \sqrt{f}\end{array}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{l}D \text{ biholo-} \\ \text{morfo a } \mathbb{D}\end{array}} \arrow[lll, bend right, Rightarrow] \\
 & & \boxed{\begin{array}{l}D \text{ homoló-} \\ \text{gicamente} \\ \text{nulo}\end{array}} \arrow[d, Leftrightarrow] & & \\
 & & \boxed{\begin{array}{l}\widehat{\mathbb{C}} - D \\ \text{conexo}\end{array}} & &
\end{tikzcd}$$

COMPORTAMIENTO EN LA FRONTERA DE TRANSFORMACIÓN CONFORME

$\mathbb{D} = B_1(0)$.

9.1. Nota. Un homeomorfismo $f\colon D \to D'$ entre dominios puede no extenderse a un homeomorfismo $\operatorname{cerr} D \to \operatorname{cerr} D'$. Por ejemplo, $D = \{0 < x < 1,\ |y| < 1\}$, $f(x, y) = (x, xy)$, $D' =$ triángulo. En este ejemplo f es de hecho real-analítica pero no se extiende a un homeomorfismo cerca de $x = 0$.

9.2. Definición. Un punto $\zeta_0 \in \partial D$ es un punto frontera accesible de D si existe una curva $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ con $\gamma([0, 1)) \subseteq D$, $\gamma(1) = \zeta_0 \in \mathbb{C}$.

(Hay un refinamiento de la noción de punto frontera accesible, en que se toma en cuenta la forma en que la curva aproximante γ tiende al punto frontera ζ_0, tomando en cuenta homotopía: curvas aproximantes no equivalentes determinan “puntos fronterizos accesibles” distintos con el mismo ζ_0.)

Definición. Sea $z_n \in D$.
Decimos $z_n \to \partial D$ cuando $(\forall K \overset{\text{cpto.}}{\subseteq} D)(\exists N)\ n \geq N \implies z_n \notin K$.
Sea $\gamma\colon [0, 1) \to D$.
Decimos $\gamma \to \partial D$ cuando $(\forall K \overset{\text{cpto.}}{\subseteq} D)(\exists t_0)\ t \geq t_0 \implies \gamma(t) \notin K$.

Proposición. Sea $f\colon D \to D'$ un homeomorfismo. Si $z_n \to \partial D$ entonces $f(z_n) \to \partial D'$. Si $\gamma \to \partial D$ entonces $f(\gamma) \to \partial D'$.

9.3. Definición. Una curva $\sigma \subseteq \partial D$ es un arco frontera libre si $(\forall z \in \sigma)(\exists \text{ vecindad } V \text{ de } z)\ V \cap \partial D \subseteq \sigma$.

Sea σ un segmento que es un arco frontera libre en ∂D. Entonces $z \in \sigma$ es un punto frontera de 1 lado si algún disco centrado en z intersecta a D en un semidisco. De otro modo (dos semidiscos) es de 2 lados. Todos los $z \in \sigma$ son del mismo número de lados 1 ó 2, y se dice que σ es un segmento frontera libre de 1 lado o de 2 lados.

(Cuando σ es de 2 lados, las curvas en $\operatorname{cerr} D$ que se acercan a $\zeta_0 \in \sigma$ desde uno u otro semidisco definen "puntos frontera accesibles" distintos.) (Se dió la definición para un segmento σ, pero podría ser una curva.)

Teorema. Sea $\sigma \subseteq \partial D$ un segmento frontera libre de 1 lado. Sea $f\colon D \to \mathbb{D}$ una transformación conforme. Entonces f se extiende a una función holomorfa inyectiva en una vecindad de $D \cup \sigma$, y $f(\sigma)$ es un arco de $\partial\mathbb{D}$.
La demostración utilizará el Principio de la Reflexión.

9.4. Teorema. (Principio de la Reflexión para Funciones Armónicas) Sea $D^+ \subseteq P^+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ un dominio con un segmento (abierto) $\sigma \subseteq \partial D^+ \cap \mathbb{R}$. Sea $D^- = \{\overline{z}\colon\ z \in D^+\}$. Sea $v \in C(D^+ \cup \sigma, \mathbb{R})$ tal que $v|_{D^+} \in \operatorname{Ar} D^+$ y $v|_\sigma = 0$. Defínase

$$V(z) = \begin{cases} v(z), & z \in D^+ \cup \sigma, \\ -v(\overline{z}), & z \in D^-. \end{cases}$$

Entonces $V \in \operatorname{Ar}(D^+ \cup \sigma \cup D^-)$.

Corolario. (Principio de la Reflexión para Funciones Holomorfas) Sea $f \in \mathcal{H}(D^+)$. Supóngase que $\operatorname{Im} f \to 0$ cuando $z \to \sigma$. Defínase

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D^+, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in D^-. \end{cases}$$

Entonces existe una forma de definir $F(x)$ para $x \in \sigma$ de manera que que y $F \in \mathcal{H}(D^+ \cup \sigma \cup D^-)$.

9.5. Definición. $\sigma\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ es un arco analítico si localmente se expresa como una serie de potencias (de una variable real); i.e., σ se extiende a una función holomorfa en un a vecindad de $\sigma \subseteq \mathbb{C}$. Se dice que σ es regular si $(\forall t)\ \sigma'(t) \neq 0$. Se dice que σ es simple si es inyectiva.

Teorema. Si $\sigma \subseteq \partial D$ es un arco frontera libre simple, regular, de 1 lado, entonces la transformación conforme (de Riemann) $f\colon D \to \mathbb{D}$ se extiende holomorfamente a (una vecindad de) $D \cup \sigma \to \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$.

Proposición. Sea $\sigma \subseteq \partial D$ un arco frontera libre simple, regular, de 2 lados. Sean V_1, V_2 semi-discos que son componentes conexos de $V \cap D$, donde V es un disco centrado en $\zeta_0 \in \sigma$. Entonces la restricción $f|_{V_1}$ de la transformación conforme $f\colon D \to \mathbb{D}$ se extiende holomorfamente a $V_1 \cup \sigma$ y es inyectiva en σ.

VARIABLE COMPLEJA $\#10$

TRANSFORMACIÓN CONFORME DE POLÍGONOS

Veremos que para polígonos la transformación conforme se extiende a la frontera. La principal dificultad está en los vértices.

10.1. Sea ∂D un polígono (simple) de n lados con ángulos internos $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, ..., $\alpha_n\pi$ ($0 < \alpha_k < 2$) en los vértices $z_1, z_2, \dots, z_n$. Los ángulos externos son $\beta_k\pi$, $\beta_k = 1 - \alpha_k$. Entonces D es convexo $\iff$ $\beta_k > 0$ para todo k.

Proposición. $\sum_1^n \beta_k = 2$.

Proposición. Sea $f\colon D \to \mathbb{D}$ conforme. Entonces f se extiende a un homeomorfismo $\operatorname{cerr} D \to \operatorname{cerr} \mathbb{D}$.

(Este es un caso particular de un teorema de Carathéodory, que dice que la proposición anterior es válida cuando D es un dominio de Jordan. No lo demostraremos en este curso, ver `http:....`)

Sea $F = f^{-1}\colon \mathbb{D} \to D$, donde D es el polígono descrito arriba.
Teorema. (Fórmula de Schwarz-Christoffel) Sea $w_k \in \partial\mathbb{D}$ el punto frontera que F envía al vértice z_k de D. Entonces

$$F(w) = c \int_0^w \frac{dw}{(w-w_1)^{\beta_1}(w-w_2)^{\beta_2}\cdots(w-w_n)^{\beta_n}} + c'$$

donde c, c' son constantes.

VARIABLE COMPLEJA #11

TRANSFORMACIÓN CONFORME DE POLÍGONOS CIRCULARES

11.1. Primero veamos la fórmula de Schwarz-Christoffel de otro punto de vista. Pensemos en la función $F\colon P^+ \to D$ donde D es dominio poligonal. Sean $w_1, w_2, \dots \in \mathbb{R}$ los puntos tales que $z_k = F(w_k)$ es vértice de D (los prevértices del map F).

La reflexión de F a lo largo de un intervalo (w_k, w_{k+1}) produce un polígono (imagen de P^-) que es contiguo a D por la arista (z_k, z_{k+1}). Al reflejar la función en P^- por otro segmento $(w_{k'}, w_{k'+1})$ se produce una funcion F_1 en P^+ que tiene como un imagen un polígono obtenido de D por dos reflexiones, o sea, de la forma $z \mapsto Az + B$. Así

$$F_1(w) = AF(w) + B.$$

De esto se deduce

$$\frac{F_1''}{F_1'} = \frac{F''}{F'}.$$

Esto puede expresarse en términos del operador diferencial no lineal $\Phi u = u''/u'$, que satisface $\Phi T = 0$ donde $T(z) = Az + B$. Se puede definir también como $\Phi u = (\log u')'$.

Proposición. (1) $\Phi(u \circ v) = ((\Phi u) \circ v)v' + \Phi v$.

(2) Dada una función φ, se puede resolver $\Phi u = \varphi$ con

$$u = k_1 \int e^{\int \varphi} + k_2.$$

(3) Si $\Phi F_1 = \Phi F$, entonces $F_1 = AF + B$ para constantes A, B.
(El recíproco de esto ya se vió arriba.)

11.2. Volvemos al map $F\colon P^+ \to D$ del polígono. Sea $\varphi(w) = (\Phi F)(w)$. Es holomorfa en P^+. Se puede reemplazar F con $AF + B$ para lograr que una arista dada sea enviada en los reales. Este reemplazo no modifica ΦF, luego φ es real en las pre-aristas (w_k, w_{k+1}). Además, al extender F por reflexión por dos pre-aristas, las dos extensiones difieren por $z \mapsto Az+B$. Puesto que la continuación analítica respeta las derivadas y las operaciones aritméticas (Principio de Permanencia, que estudiaremos después), se obtiene la misma φ en P^- por reflexión de cualquier segmento en $\widehat{\mathbb{R}} \setminus \{w_k\}$. Así extendida, φ es univaluada en $\widehat{\mathbb{R}} \setminus \{w_k\}$, donde es claramente holomorfa.

Falta ver qué tipo de singularidad tiene ΦF en w_k, ya sabemos hacerlo para F (y el resultado debería ser consistente con el concepto de singularidad aislada):

$$
\begin{aligned}
z \;=\; F(w) &= z_k + t^{\alpha_k} \quad (\text{donde } t = (z - z_k)^{1/\alpha_k}) \\
&= z_k + (w - w_k)^{\alpha_k} G_k(w) \quad (\text{con } G_k \text{ holomorfa en } w_k), \\
F'(w) &= (w - w_k)^{\alpha_k - 1} \widehat{G}_k(w) \quad \widehat{G}_k \text{ holomorfa, } \widehat{G}_k(w_k) \neq 0), \\
F''(w) &= (w - w_k)^{\alpha_k - 2}((\alpha_k - 1)\widehat{G}_k(w) + (w - w_k)\widehat{G}_k'(w))
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\varphi(w) &= \frac{F''(w)}{F'(w)} = \frac{1}{w - w_k} \frac{(\alpha_k - 1)\widehat{G}_k(w) + (w - w_k)\widehat{G}_k'(w)}{\widehat{G}_k(w)} \\
&= \frac{\alpha_k - 1}{w - w_k} + O(1)
\end{aligned}
$$

cerca de w_k. Razonando como antes, la función

$$
\varphi(w) + \sum \frac{\beta_k}{w - w_k}
$$

no tiene singularidad en ningun w_k, por reflexión se extiende a P^-, además se calcula (usando el hecho que F es holomorfa en el ∞) la expansión

$$
\varphi(w) \;=\; \frac{-2}{w} + O(\frac{1}{w^2}) \quad (w \to \infty),
$$

así φ es holomorpha en $w = \infty$ y obviamente la sumatoria lo es también. Así $\varphi(w) + \sum \beta_k/(w - w_k)$ es holomorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ y por el Teorema de Liouville es constante. El valor es cero pues $\varphi(\infty) = 0$. Por lo tanto sabemos $\varphi(w) = -\sum \frac{\beta_k}{w - w_k}$ y podemos resolver para F con $\Phi F = \varphi$ para obtener otra vez la fórmula de Schwarz-Christoffel.

11.3. Ahora sea D un <u>polígono circular</u>, es decir, las aristas son arcos de círculos en $\widehat{\mathbb{C}}$. Cambiamos las letras, $f\colon P^+ \to D$, $w = f(z)$, $z \in P^+$, $w \in D$.

Una inversión en un círculo es $(A_1\overline{z} + B_1)/(C_1\overline{z} + D_1)$ luego dos reflexiones se componen para dar una transformación de la forma

$$Tz = \frac{Az + B}{Cz + D}.$$

11.4. Queremos un operador que aniquile a toda $T \in \operatorname{Aut}\widehat{\mathbb{C}}$. Observamos las derivadas

$$\begin{aligned} T'(z) &= \frac{1}{(Cz+D)^2} \quad (\text{ suponiendo } AD - BC = 1), \\ T''(z) &= \frac{-2C}{(Cz+D)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{T''(z)}{T'(z)} &= \frac{-2C}{Cz+D} \\ \left(\frac{T''(z)}{T'(z)}\right)' &= \frac{2C^2}{(Cz+D)^2} \\ \left(\frac{T''(z)}{T'(z)}\right)^2 &= \frac{4C^2}{(Cz+D)^2} \end{aligned}$$

lo cual hace claro lo que hay que definir:

<u>Definición.</u> La <u>derivada schwarziana</u> de una función holomorfa f es

$$\mathcal{S}_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

11.5. <u>Proposición.</u> (a) $\mathcal{S}_f \equiv 0 \iff f \in \operatorname{Aut}\widehat{\mathbb{C}}$ ó $f \equiv$ constante.
(b) $\mathcal{S}_{g\circ f} = (\mathcal{S}_g \circ f)f'^2 + \mathcal{S}_f$.

<u>Proposición.</u> Sea $\gamma \subseteq \mathbb{R}$ un segmento, f holomorfa en una vecindad de γ. Si $f(\gamma)$ es un arco circular, entonces $\mathcal{S}_f$ es real en γ.