VARIABLE COMPLEJA #6

FAMILIAS NORMALES

Recordemos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ es una *familia normal* cuando cada sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge en $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$. Esto es lo mismo que decir que $\operatorname{cerr}(\mathcal{F})$ es compacto en $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$.

La mayoría de los siguientes conceptos se entenderían aún sin dar la definición explícitamente.

6.1. Definición.
$\mathcal{F}$ es uniformemente acotada si $(\exists M)(\forall z \in D)(\forall f \in \mathcal{F})\ \ |f(z)| < M$.
$\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en $E \subseteq D$ si la familia

$$\mathcal{F}|_E = \{f|_E :\ f \in \mathcal{F}\}$$

es uniformemente acotada.
$\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en compactos si $(\forall K \overset{\text{cpto.}}{\subseteq} D)$ $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en K.
$\mathcal{F}$ es localmente uniformemente acotada si $(\forall z \in D)(\exists\ V$ vec. de $z)$ $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en V.
$\mathcal{F}$ es acotada puntualmente si $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en todo subconjunto formado de un solo punto.

6.2. Definición. $\mathcal{F}$ es equicontinua (=uniformemente eq.) en E si
$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z_1, z_2 \in E)(\forall f \in \mathcal{F})$

$$|z_1 - z_2| < \delta \implies |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon.$$

$\mathcal{F}$ es (uniformemente) equicontinua en compactos si $(\forall K \overset{\text{cpto.}}{\subseteq} D)$ $\mathcal{F}$ es equicontinua en K.
$\mathcal{F}$ es localmente equicontinua si $(\forall z \in D)(\exists\ V$ vec. de $z)$ $\mathcal{F}$ es equicontinua en V.

Las equivalencias entre "localmente" y "en compactos" se pueden verificar fácilmente con la definición de compacto, y el hecho que $\mathbb{C}$ es localmente compacto:

Proposición. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ es localmente uniformemente acotada $\iff$ $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en compactos.

Nota. equicontinua $\not\Rightarrow$ loc. unif. acotada. (Considerar $z+1$, $z+2$, $\ldots$)

Proposición. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ es localmente equicontinua $\iff$ $\mathcal{F}$ es equicontinua en compactos.

Lema. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ es una familia normal $\iff (\forall K \overset{\text{cpto.}}{\subseteq} D)(\forall \delta > 0)$ $(\exists \{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \subseteq \mathcal{F})(\forall f \in \mathcal{F})(\exists j)\ \sup_K |f - f_j| < \delta$.

Demostración. La condición dice que $\mathcal{F}$ es localmente acotada: $(\forall \text{cpt. } K \subseteq D)\ (\forall \delta > 0)$

$$(\exists\ f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F})\ (\forall f \in \mathcal{F})\ (\exists j)\ \sup_{z \in K} \{f(z) - f_j(z)|\} < \delta.$$

Esto es equivalente a que cerr$\mathcal{F} \subseteq C(D, \mathbb{C})$ sea un subconjunto totalmente acotado (un espacio métrico que se cubre por un número finito de discos de radio arbitrariamente pequeño), lo que significa que $\mathcal{F}$ es una familia normal. $\square$

Teorema. (Arzela-Ascoli) Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal $\iff$ (a) $\mathcal{F}$ es equicontinua en compactos, y (b) $\mathcal{F}$ es acotada puntualmente.

Demostración. $\Rightarrow$. (a) Tomar un compacto $K \subseteq D$ y un $\epsilon > 0$. Por el Lema, escoger $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ tales que $(\forall f \in \mathcal{F})\ (\exists j)\ \sup_K |f - f_j| < \epsilon/3$. Por ser $f_j|_K$ uniformemente continua, tomar $\delta_j > 0$ tal que

$$(\forall z_1, z_2 \in K)\ |z_1 - z_2| < \delta_j \implies |f_j(z_1) - f_j(z_2)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sea $\delta = \min \delta_j$. Ahora, para cualquier $f \in \mathcal{F}$, escoger j tal que $\sup_K |f - f_j| < \epsilon/3$. Así, cuando $z_1, z_2 \in K$ $|z_1 - z_2| < \delta_j$ se tiene

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le |f(z_1) - f_j(z_1)| + |f_j(z_1) - f_j(z_2)| + |f_j(z_2) - f(z_2)| < \epsilon.$$

Esto dice que $\mathcal{F}$ es equicontinua en el compacto K, que fue arbitrario.
(b) Si $\mathcal{F}$ no fuera acotada puntualmente, digamos no acotada en $z \in D$, habría $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ con $f_n(z) \to \infty$. Por ser $\mathcal{F}$ una familia normal habría una subsucesión convergente $f_{n_k} \to f$, luego $f(z) = \infty$, lo cual es absurdo para $f \in C(D, \mathbb{C})$. Por eso $\mathcal{F}$ es acotada puntualmente.

$\Leftarrow$. Supongamos (a),(b). Considérese cualquier sucesión en $\mathcal{F}$. Escogemos cualquier sucesión $\{z_n\}$ de puntos densa en D. Por (b) hay una subsucesión, llámese $\{f_j\}$, cuyos valores en z_1 convergen.

Usamos la observación que cualquier subsucesión de una sucesión dada puede ser identificada dando la colección de índices que usa, que es un subconjunto infinito de $\mathbb{Z}^+$. Recíprocamente, cualquier subconjunto infinito de $\mathbb{Z}^+$ define una subsucesión (pues lleva un orden obvio, tiene primer, segundo, ..., elementos). Los índices de $\{f_j\}$ son $\mathcal{N}_1 = \mathbb{Z}^+$, y aplicando la hipótesis (b) inductivamente tomamos subconjuntos infinitos

$$\mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{N}_1 : \quad \{f_j(z_2) : \ j \in \mathcal{N}_2 \text{ converge}\},$$

$$\mathcal{N}_3 \subseteq \mathcal{N}_2 : \quad \{f_j(z_3) : \ j \in \mathcal{N}_3 \text{ converge}\},$$

etc. Aplicamos el "proceso diagonal de Cantor" a los conjuntos infinitos decrecientes

$$\mathbb{Z}^+ = \mathcal{N}_1 \supseteq \mathcal{N}_2 \supseteq \mathcal{N}_3 \supseteq \cdots ,$$

es decir, sea k_j el j-ésimo elemento de $\mathcal{N}_j$. Por construcción, $k_j \geq j$, así que $k_j \to \infty$, lo cual permite usar $\{k_j\}$ para definir la subsucesión "diagonalizada" $\{f_{k_j}\}$.

Por la definición de $\mathcal{N}_n$, para cada n fijo la sucesión $\{f_{k_j}(z_n)\}_j$ converge (una cola de esta sucesión coincide con una cola de la sucesión $\{f_j(z_n) : \ j \in \mathcal{N}_n\}$).

Con esto mostraremos que $\{f_{k_j}\}$ converge en $C(D, \mathbb{C})$. Para ver que converge uniformemente en un compacto $K \subseteq D$, sea $\epsilon > 0$. Por (a), $\{f_{k_j}\}$ es equicontinua en K, por lo que podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$(\forall z, z' \in K) \ (\forall j) \ \ |z - z'| < \delta \implies |f_{k_j}(z) - f_{k_j}(z')| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Cubrimos K por una número finito de discos de radio $\delta/2$. Por la densidad de $\{z_n\}$, cada uno de estos discos contiene algún z_n. Para tal colección finita Z de z_n y el hecho que $\{f_{k_j}(z_n)\}$ es de Cauchy, podemos tomar un índice i_0 tal que para cada $z_n \in Z$,

$$i, j > i_0 \implies |f_{k_i}(z_n) - f_{k_j}(z_n)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dado $z \in K$ arbitrario, z está en uno de los discos de la cubierto, luego hay algún $z_n \in Z$ tal que $|z - z_n| < \delta$. De esto

$$|f_{k_i}(z) - f_{k_i}(z)| \leq |f_{k_i}(z) - f_{k_i}(z_n)| + |f_{k_i}(z_n) - f_{k_j}(z_n)| + |f_j(z_n) - f_{k_j}(z)|$$

$$< \epsilon.$$

Esto dice que $\{f_{k_j}\}$ es uniformemente de Cauchy en K, por lo que converge uniformemente en K. Por el rellenado $D = \bigcup K_n$ esto define un límite $f = \lim_j f_{k_j}$ tal que $f_{k_j} \to f$ en $C(D, \mathbb{C})$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es una familia normal. $\square$

6.3. Ahora consideramos funciones holomorfas.

Proposición. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(D)$, $\mathcal{F}$ localmente uniformemente acotada. Entonces $\mathcal{F}'$ es localmente uniformemente acotada.

Demostración. Dado $z_0 \in D$ tomar $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ tal que cada $f \in \mathcal{F}$ satisfaga $\sup_{B_r(z_0)} |f| \leq M$. La fórmula integral de Cauchy $f'(z) = (1/(2\pi i)) \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)\, d\zeta/(\zeta - z)^2$ da

$$|f'(z)| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \frac{M}{(r/2)^2} = \frac{4M}{r}$$

cuando $z \in B_{r/2}(z_0)$. Esto dice que $\mathcal{F}'$ es localmente uniformemente acotada.

Lema. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(D)$, $\mathcal{F}$ localmente uniformemente acotada. Entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua en compactos.

Demostración. Por ser $\mathcal{F}'$ localmente uniformente acotada, dado $z_0 \in D$ tomar $r > 0$, $M > 0$ tales que $|f'| < M$ en $B_r(z_0)$.
Para $z_1, z_2 \in B_r(z_0)$,

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \int_{z_1}^{z_2} f'(\zeta)\, d\zeta \leq M|z_1 - z_2|$$

donde la integración es sobre el segmento de z_1 a z_2, que está en $B_r(z_0)$. Eso es, dado $\epsilon > 0$ el valor $\delta = \epsilon/M$ cumple con la definición de equicontinuidad en $B_r(z_0)$, i.e. $\mathcal{F}$ es localmente equicontinua y por ende equicontinua en compactos. $\square$

Lema. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}(D, \mathbb{C})$, $\mathcal{F}$ equicontinua en compactos y uniformemente acotada en $\{z_0\}$. Entonces $\mathcal{F}$ es localmente uniformemente acotada.

Demostración. Tenemos $|f(z_0)| \leq M$ para $f \in \mathcal{F}$. Dado $z \in D$, sea $\gamma \subseteq D$ una curve con extremos z_0, z. Como γ es compacta, $(\forall \epsilon < 0)$ $(\exists \delta > 0)$

$$(\forall z_1, z_2 \in \gamma)\ (\forall f \in \mathcal{F}) \quad |z_1 - z_2| < \delta \implies |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon.$$

Tomemos puntos consecutivos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ a lo largo de γ con $z_n = z$, tales que $|z_{j+1} - z_j| < \delta$ (γ es uniformemente continua). Por la Desiguald del Triángulo, $|f(z) - f(z_0)| < N\epsilon$. En consecuencia

$$|f(z)| < |f(z_0)| + n\epsilon \leq M + n\epsilon =: M_z$$

pues todo lo anterior dependía de z. Esto muestra que para cualquier $z \in D$, $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en el subconjunto unipuntual $\{z\}$. Para z' en una vecindad compacta de z donde $\mathcal{F}$ es equicontinua, tenemos

$$|f(z')| \leq |f(z)| + 1 \leq M_z + 1.$$

Esto muestra que $\mathcal{F}$ es localmente uniformente acotada.

6.4. <u>Teorema.</u> (Montel) Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(D)$. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal $\iff$ $\mathcal{F}$ es localmente uniformemente acotada.

<u>Demostración.</u> <u>$\Rightarrow$</u>. Sea $\mathcal{F}$ una familia normal. Por Arzela-Ascoli, $\mathcal{F}$ es equicontinua y es acotada en algún punto. Por el lema, $\mathcal{F}$ es localmente uniformemente acotada.
<u>$\Leftarrow$</u>. Sea $\mathcal{F}$ localmente uniformemente acotada. Por un lema, $\mathcal{F}$ es equicontinua en compactos, y obviamente es puntualmente acotada. Por el teorema de Arzela-Ascoli, $\mathcal{F}$ es una familia normal. $\square$