VARIABLE COMPLEJA $\#4$

FUNCIONES ARMÓNICAS

4.1. Sea $V = p + iq$ la velocidad de un fluido en alguna región del plano. Algunas propiedades físicas del fluido corresponden a propiedades matemáticas de V:

Ejemplo. Dado un (sub)dominio de Jordan con frontera una curva suave parametrizada por $z(t) = x(t) + iy(t)$ ($|z'(t)| = 1$), se calcula la cantidad neta de fluido que entra como sigue: el vector normal hacia dentro es $d\vec{n} = (-dy, dx)$, luego el flujo (neto) a través de la frontera es

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{n} = \oint (p, q) \cdot (-dy, dx) = \oint (q\,dx - p\,dy).$$

Decimos que el flujo es incompresible si el flujo es cero para cada subdominio de Jordan.

Ejemplo. La circulación alrededor de una curva cerrada es

$$\oint \vec{V} \cdot dz = \oint (p, q) \cdot (dx, dy) = \oint (p\,dx + q\,dy)$$

y el flujo se llama irrotacional si la circulación siempre es cero.

4.2. Fijemos (x_0, y_0). Si V es incompresible, entonces la cantidad

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (q\,dx - p\,dy)$$

está bien definida en un área simplemente conexa (no depende del camino de integración); se llama el *potencial de velocidad.* Si V es irrotacional, entonces

$$\phi(x, y) = -\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (p\,dx + q\,dy)$$

está bien definida; se llama el *potencial del fluido.*

Supongamos que V es tanto irrotacional como incompresible.
Entonces tenemos $\phi_x = -p = \psi_y$; $\phi_y = -q = -\psi_x$. Así la función

$$U = \phi + i\psi = \text{ (potencial del fluido) } + i\text{(potencial de velocidad)}$$

es holomorfa, por lo que la velocidad $V = -\overline{U'}$ es antiholomorfa. Tanto ϕ como ψ son armónicas.

4.3. El gradiente

$$\nabla\phi = (\phi_x, \phi_y) = (-p, -q) = -V$$

es un vector paralelo a V y además perpendicular a las curvas de nivel $\phi = \text{const}$:

$$\phi(x(t), y(t)) = c \implies \phi_x x' + \phi_y y' = 0 \implies \nabla\phi \perp z'(t)$$

donde $z'(t)$ es el tangente a la curva de nivel. Por eso las curvas de nivel de ϕ son perpendiculares a V y también perpendiculares a las curvas de nivel de ψ.

Teorema. Un fluido incompresible e irrotacional fluye a lo largo de las curvas de nivel de su potencial de velocidad ψ.

4.4. Proposición. Sea u armónica en D ($u \in \operatorname{Ar} D$) y sea $f\colon D' \to D$ holomorfa. Entonces $u \circ f$ es armónica en D'. Además, las curvas de nivel de $u \circ f$ son f^{-1}(curvas de nivel de u).

Esto permite convertir un problema de potencial en un dominio a un problema de potencial en otro dominio.

Problema de Dirichlet: $\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ en } D, \\ u &= h \text{ en } \partial D. \end{cases}$

Problema de Neumann: $\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ en } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= h \text{ en } \partial D. \end{cases}$

Operador Dirichlet-a-Neumann: Dada h en ∂D, resolver el problema de Dirichlet, lo cual da una funcion u en el interior. Tomar la derivada normal $\partial u/\partial\vec{n}$, en los puntos de ∂D.

Operador de Hilbert: Dada h en ∂D, resolver el problema de Dirichlet, lo cual da una funcion u en el interior. Tomar un conjugado armónico v para u (quizás normalizado por $v(0) = 0$ o algo similar) y restringir a ∂D.

(Se usan los mismos nombres para los conceptos análogos correspondientes a otros operadores en lugar de Δ.)

4.5. PROPIEDADES DE FUNCIONES ARMÓNICAS

Coordenadas Polares. $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$.

$$\frac{\partial\partial(x,y)}{\partial\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & -y \\ y/r & x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\partial(r,\theta)}{\partial\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} & -\frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = r(ru_r)_r + u_{\theta\theta}$$

Por eso $u_1(z) = \log|z| = \log r$ y $u_2(z) = \arg z = \theta$ son funciones armónicas de (x,y).

4.6. Teorema. (Propiedad del Valor Medio PVM) Sea $u \in \operatorname{Ar} D$. Entonces cada vez que $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ se tiene

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Definición. Decimos que $u \in \mathcal{C}(D,\mathbb{R})$ satisface el PVM si $(\forall z_0 \in D)(\forall r > 0)\ \overline{B_r(z_0)} \subseteq D \implies u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta$.

Decimos que $u \in \mathcal{C}(D,\mathbb{R})$ satisface el PVM en pequeños radios si $(\forall z_0 \in D)(\exists r_0 > 0)(\forall r < r_0)\ \ldots$

4.7. Teorema. (Principio del Máximo PMax) Sea $u \in \mathcal{C}(D,\mathbb{R})$ que satisface la PVM en pequeños radios en D. Si u no es idénticamente constante, entonces no hay punto de D en que u tome su valor máximo.

Nota. u satisface PVM en pequeños radios $\implies$ $-u$ satisface PVM en pequeños radios $\implies$ $-u$ no toma máximo si no es constante $\implies$ u no toma mínimo si no es constante. ("Principio del Mínimo")

Corolario. Sea D un dominio acotado, $u \in \mathcal{C}(\operatorname{cerr} D,\mathbb{R})$, $u|_D$ armónica, $u|_{\partial D} = 0$. Entonces $u = 0$.

Corolario. Una función armónica en un dominio acotado que tenga una extensión continua a la frontera está determinada por estos valores en la frontera.

4.8. Fijemos $h\colon \partial D \to \mathbb{R}$ continua. ¿Existe $u \in \operatorname{Ar} D$ con extensión continua a la frontera $u|_{\partial D} = h$? (Cuando D no es acotado, se podrá poner una condición de continuidad en el ∞.)

Definición. D es un dominio de Dirichlet si para toda $h \in \mathcal{C}(\partial D, \mathbb{R})$ la respuesta a la pregunta es "sí".

Ejemplo. $D = \{0 < |z| < 1\}$. Definamos $h(0) = 0$, $h(z) = 1$ para $|z| = 1$. Veremos que si existiera una solución al problema de Dirichlet, tendría que ser armónica en $z = 0$ también (es decir, armónica en $B_1(0)$), lo cual contradiría el Principio del Máximo. Así que D no es un dominio de Dirichlet.

4.9. La solución al Problema de Dirichlet *para un disco* es fácil y se llama la fórmula de Poisson. Consideremos u armónica en $B_{R+\epsilon}(0)$ e investiguemos la relación entre sus valores en $\partial B_R(0)$ y en un punto $p \in B_R(0)$. La transformación de Möbius

$$z = T(w) = \frac{R(w + p/R)}{(\overline{p}/R)w + 1} = \frac{R(Rw + p)}{\overline{p}w + R}$$

lleva $\{|w| < 1\}$ a $\{|z| < R\}$ con $0 \mapsto p$. La función $\widetilde{u} = u \circ T$, o sea $\widetilde{u}(w) = u(z)$, es armónica en $B_1(0)$ y por la PVM

$$u(p) = \widetilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{u}(e^{i\phi})\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{d\phi}{d\theta}\, d\theta.$$

El núcleo de Poisson se define como $(1/2\pi)(d\phi/d\theta)$. (Una función en $[0, 2\pi]$ que es $\mathbb{R}$-valuada, pero que depende de p.) Para calcularlo, veamos la inversa

$$e^{i\phi} = w = \frac{Rz - Rp}{-\overline{p}z + R^2}$$

donde ahora $z = Re^{i\theta}$. Luego $dw = iw\, d\phi$, $dz = iz\, d\theta$, $d\phi/d\theta = (dw/dz)(z/w)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{d\theta} &= \frac{R(R^2 - |p|^2)}{(-\overline{p}z + R^2)^2} \cdot z \cdot \frac{-\overline{p}z + R^2}{R(z - p)} \\
&= \frac{(R^2 - |p|^2)z}{(-\overline{p}z + \overline{z}z)(z - p)} \\
&= \frac{R^2 - |p|^2}{|z - p|^2}.
\end{aligned}$$

Esto se puede expresar de muchas formas. La fórmula

$$\frac{z+p}{z-p} = \frac{(z+p)(\overline{z}-\overline{p})}{(z-p)(\overline{z}-\overline{p})}$$

nos da

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{R^2-|p|^2}{|z-p|^2} = \operatorname{Re}\frac{z+p}{z-p}.$$

<ins>Teorema.</ins> Sea $u \in \mathcal{C}(\overline{B_R(0)}, \mathbb{R})$, u armónica en $B_R(0)$. Sea $p = R_0 e^{i\theta_0}$ donde $0 \leq R_0 < R$. Entonces

$$\begin{aligned} u(p) = u(R_0 e^{i\theta_0}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R^2 - R_0^2}{|Re^{i\theta} - R_0 e^{i\theta_0}|^2}\, u(Re^{i\theta})\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R^2 - R_0^2}{R^2 - 2RR_0\cos(\theta-\theta_0) + R_0^2}\, u(Re^{i\theta})\, d\theta. \end{aligned}$$

<ins>Definición.</ins> <ins>Núcleo de Poisson</ins>

$$K(z,\theta) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$$

para $|z| < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

4.10. Sea $h \in \mathbb{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$. <ins>Definición.</ins> La <ins>integral de Poisson</ins> de h es

$$P[h](z) = P_h(z) = \int_0^{2\pi} K(z,\theta) h(\theta)\, d\theta$$

para $|z| < 1$.

Se tiene $P\colon\ h \mapsto P_h\colon\ \mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R}) \to \operatorname{Ar}(B_1(0))$. También h podría ser cualquier función integrable. Para el disco $B_R(z_0)$ hay un kernel $K((z-z_0)/R,\theta)$ dando un operador $P_{z_0,R}(h)$.

<ins>Proposición.</ins> (1) P es un operador lineal.
(2) P es un operador positivo.
(3) P_c es constante cuando c es constante.
(4) Si $c_1 \leq h(\theta) \leq c_2$ para todo θ, entonces $c_1 \leq P_h(z) \leq c_2$ para todo z.

4.11. Proposición. (Schwarz) Sea $h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continua por pedazos (o integrable+acotada) y sea h continua en θ_0. Entonces

$$\lim_{\substack{z \to e^{i\theta_0} \\ |z|<1}} P_h(z) = h(\theta_0).$$

4.12. Teorema. u satisface la PVM en pequeños radios $\implies$ u es armónica.

Proposición. $\operatorname{Ar} D$ es cerrado en $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$.

4.13. Proposición. (Desigualdad de Harnack) Sea $u \in \operatorname{Ar} B_R(0)$ con $u \geq 0$ Entonces para cada $z \in B_R(0)$ se tiene

$$\frac{R - |z|}{R + |z|} u(0) \leq u(z) \leq \frac{R + |z|}{R - |z|} u(0).$$

Proposición. (Teorema de Liouville) Sea $u \in \operatorname{Ar} \mathbb{C}$, u acotada. Entonces u es constante.

Proposición. (Principio de Harnack) Sea $\{u_n\} \subseteq \operatorname{Ar} D$ con $u_n \leq u_{n+1}$. Entonces o bien
(a) $u_n \to \infty$ uniformemente en compactos de D, o bien
(b) existe $u \in \operatorname{Ar} D$ tal que $u_n \to u$ en $\operatorname{Ar} D$.

VARIABLE COMPLEJA #5

FUNCIONES SUBARMÓNICAS

5.1. Definición. Sea $v \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$. Se dice que v es subármonica si $(\forall z_0 \in D)(\forall r : \overline{B_r(z_0)} \subseteq D)$

$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta.$$

Se dice que v es subármonica en pequeños radios si $(\forall z_0 \in D)(\exists r_0 > 0)(\forall r < r_0) \ \ldots$
Se dice que v es superármonica si $-v$ es subármonica.

Nota. subarmónica : armónica :: convexa : lineal
"Una función subarmónica queda debajo de la función armónica con los mismos valores de frontera."

5.2. Proposición. v subarmónica en pequeños radios en $D \implies$ v satisface el PMax en D.

Proposición. v es subarmónica en $D \iff$

$$(\forall D_1 \subseteq D)(\forall u_1 \in \operatorname{Ar} D_1)\ v - u_1 \text{ satisface el PMax en } D_1.$$

Proposición. subarmónica $\iff$ subarmónica en pequeños radios.
subarmónica + superarmónica $\iff$ armónica.

5.3. Proposición. (1) v subarmónica, $c \geq 0 \implies cv$ subarmónica.

(2) v_1, v_2 subarmónicas $\implies v_1 + v_2$ subarmónica.

(3) v_1, v_2 subarmónicas $\implies \max(v_1, v_2)$ subarmónica.
(4) v subarmónica en D; $\overline{D}_1 = \overline{B_r(z_0)} \subseteq D$. Defínase $h = v|_{\partial D_1}$ y

$$\widetilde{v} = \begin{cases} v & \text{afuera de } D_1 \\ P_{z_0,R}(h) & \text{dentro de } D_1. \end{cases}$$

Entonces $\widetilde{v}$ es subarmónica.

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE DIRICHLET

5.4. Proposición. v subarmónica en el dominio acotado D, $u \in \mathcal{C}(\operatorname{cerr} D, \mathbb{R})$, u armónica en D. Supóngase que $(\forall \zeta_0 \in \partial D)$

$$\limsup_{\substack{z \to \zeta_0 \\ z \in D}} v(z) \leq u(\zeta_0)$$

("v no tiende a más de u en ∂D"). Entonces $v(z) \leq u(z)$ para todo $z \in D$.

En el contexto de esta proposición, para u armónica con extensión continua a ∂D, y para $z \in D$ se tiene obviamente

$$u(z) = \sup\{v(z) \colon \ v \text{ subarmónica en } D, \limsup_{\substack{z' \to \zeta_0 \\ z' \in D}} v(z') \leq u(\zeta_0) \text{ para todo } \zeta_0 \in \partial D\}.$$

Definición. $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio acotado, $h \colon \partial D \to \mathbb{R}$ acotada. La familia de Perron de h es

$$\operatorname{Perr}(h) = \{v \colon \ v \text{ subarmónica en } D, \limsup_{\substack{z \to \zeta_0 \\ z \in D}} v(z) \leq h(\zeta_0) \text{ para } \zeta_0 \in \partial D\}.$$

Nota. $\operatorname{Perr}(h) \neq \varnothing$ porque $-M \in \operatorname{Perr}(h)$ donde $|h(\zeta)| \leq M$. Para $v \in \operatorname{Perr}(h)$ se tiene $v \leq M$ en D porque M es armónica.

La función de Perron de h es

$$u_h(z) = \sup\{v(z) \colon \ v \in \operatorname{Perr}(h)\}, \ z \in D.$$

Nota. Si existe una solución al problema de Dirichlet con valores de frontera h, esta solución tiene que estar en $\operatorname{Perr}(h)$ y por lo tanto es igual a u_h.

Teorema. $u_h \in \operatorname{Ar} D$.

5.5. Definición. Sea $\zeta_0 \in \partial D$. Una barrera para D en ζ_0 es una función $\omega \in \mathcal{C}(\operatorname{cerr}(D), \mathbb{R})$ que es armónica en D y que satisface $\omega > 0$ en $\partial D - \{\zeta_0\}$, mientras $\omega(\zeta_0) = 0$.

Ejemplo. Supóngase que $\zeta_0 \in \partial D$ y que el segmento $[\zeta_0, \zeta_1]$ está en el exterior de D salvo por el extremo ζ_0. Entonces hay una rama continua de $\sqrt{(z-\zeta_0)/(z-\zeta_1)}$ en D, y un ángulo α tal que

$$\operatorname{Im}\left[e^{-i\alpha}\sqrt{\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1}}\right] > 0$$

en $\partial D - \{\zeta_0\}$, vale 0 en ζ_0. Ésta es una barrera para D en ζ_0.

5.6. D sigue siendo un dominio acotado:

Teorema. Sea $h\colon \partial D \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $\zeta_0 \in \partial D$ y supóngase que existe una barrera para D en ζ_0. Entonces la función de Perron u_h se extiende continuamente a $D \cup \{\zeta_0\}$ con el valor $u_h(\zeta_0) = h(\zeta_0)$.

Corolario. D es un dominio de Dirichlet $\iff$ D tiene una barrera en cada punto de su frontera.

Teorema. Sea $\zeta_0 \in \partial D$. Supóngase que la componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}} - D$ que contiene ζ_0 contiene puntos otros que ζ_0. Entonces D tiene una barrera en ζ_0.

Nota. Es posible que D tenga una barrera en ζ_0 aunque la componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}} - D$ que contiene ζ_0 sea $\{\zeta_0\}$.

Teorema. D es simplemente conexo y acotado $\implies$ D es un dominio de Dirichlet.
(Demostración después.)