VARIABLE COMPLEJA $\#1$

ESPACIOS DE FUNCIONES $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$, $\mathcal{H}(D)$, $\mathcal{M}(D)$

1.1. Proposición. Dado K compacto: $C(K,\mathbb{C})$ es un espacio métrico completo con la métrica $d(f,g)=\sup_K |f-g|$.

Pero para dominios, $\sup_D |f-g|$ podría ser infinito. Un *rellenado* de un dominio $D\subseteq\mathbb{C}$ es una sucesión $\{K_n\}$ donde $D=\bigcup_1^\infty K_n$, K_n es compacto, $K_n\subseteq \operatorname{int} K_{n+1}$.

Construcción de un rellenado:

$$K_n=\overline{B_n(0)}\cap\{z\in D\colon\ \operatorname{dist}(z,\partial D)\geq\frac{1}{n}\}.$$

Proposición. Dado un rellenado $\{K_n\}$, y $K\subseteq D$ compacto. Entonces $K\subseteq K_n$ para algún n.

Dado $\{K_n\}$ se definen para $f,g\in C(D,\mathbb{C})$:

$$\rho_n(f,g)=\sup_{K_n}|f-g|,\quad \rho(f,g)=\sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}.$$

Lema. $\alpha\colon\ [0,\infty)\to[0,\infty)$ suave, $\alpha(0)=0$, $\alpha'>0$, $\alpha''<0$. Entonces $\alpha(s)+\alpha(t)\geq\alpha(s+t)$.

Corolario. Si $a,b,c\geq 0$, $a+b\geq c$, entonces $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\geq\dfrac{c}{1+c}$.

Proposición. ρ es una métrica en $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$.
(Su valor exacto depende del rellenado.)

Proposición. (1) Sea $\epsilon>0$. Entonces existen $\delta>0$, $K\overset{\text{cpto}}{\subseteq}D$ tales que

$$\sup_K|f-g|<\delta\implies\rho(f,g)<\epsilon.$$

(2) Sean $\delta>0$, $K\overset{\text{cpto}}{\subseteq}D$. Entonces existe $\epsilon>0$ tal que

$$\rho(f,g)<\epsilon\implies\sup_K|f-g|<\delta.$$

Teorema. (a) Sea $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{C}(D,\mathbb{C})$. Entonces

$$\mathcal{O} \text{ es abierto} \iff (\forall f \in \mathcal{O})(\exists \delta > 0,\ K \overset{\text{cpto}}{\subseteq} D)$$
$$\{g\colon \sup_K |f-g| < \delta\} \subseteq \mathcal{O}.$$

(b) $f_n \to f$ en $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ si y sólo si $f_n \to f$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D.
("La topología descrita en el Teorema es metrizable, y no depende del rellenado.")

1.2. Definición. Un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ es una familia normal si cada sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_j}\}$ que converge a un elemento de $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ (no necesariamente en $\mathcal{F}$).

$\mathcal{H}(D) = \{f\colon D \to \mathbb{C},\ f \text{ holomorfa}\} \subseteq \mathcal{C}(D,\mathbb{C})$

Proposición. (a) $\mathcal{H}(D)$ es cerrado en $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$.
(b) der: $f \mapsto f'$ es una función continua $\mathcal{H}(D) \to \mathcal{H}(D)$.

Corolario. $\mathcal{H}(D)$ es un espacio métrico completo con la métrica ρ.

1.3. Teorema. (de Hurwitz) Sea $f_n \in \mathcal{H}(D)$, $f_n \to f$. Supóngase que ninguna f_n se anula en D. Entonces o bien f no se anula en D, o bien $f \equiv 0$.

Teorema. Sea $f_n \in \mathcal{H}(D)$, $f_n \to f$. Supóngase que ninguna f_n tiene más de k ceros en D (contando su multiplicidad). Entonces o bien f no tiene más de k ceros en D (contando su multiplicidad), o bien $f \equiv 0$.

VARIABLE COMPLEJA $\#2$

FRACCIONES PARCIALES, TEOREMA DE MITTAG-LEFFLER

2.1. Descomposición en *fracciones parciales* de una función racional R, donde los polos de R son $z_1, \ldots, z_n$ (distintos):

$$R(z) = R_n(z) + \sum_1^n P_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right)$$

donde R_n, P_j son polinomios. Los P_j tienen término constante nulo, $P_j(0) = 0$.

Una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ puede tener una infinidad de polos; no necesariamente se descompone como

$$\text{“ } f(z) = g(z) + \sum_1^\infty P_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right) \text{ ”}$$

2.2. Ejemplo. $f(z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{\pi^2}{6} z + O(z^3)$ puede escribirse

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} = \sum_{-n}^{n} \frac{(-1)^j}{z - j} + g_n(z)$$

para cualquier n finito, pero la serie no converge tomando $n \to \infty$.

Sería aún menos claro qué hacer con los puros términos para $j > 0$ (o cualquier otro subconjunto de j).

Teorema. (de Mittag-Leffler) Sean z_j distintos, $z_j \to \infty$, y sean P_j polinomios con término constante nulo. Entonces
(a) Existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con precisamente las partes singulares $P_j(1/(z - z_j))$;
(b) Toda tal f puede escribirse

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{\infty} (P_j(\frac{1}{z - z_j}) - p_j(z))$$

donde los $p_j(z)$ son polinomios y $g(z)$ es una función entera.

2.3. Ejemplo.

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{j\neq 0}(-1)^j\left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j}\right) + g(z).$$

Ejemplo.

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2}.$$

Ejemplo.

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{j\neq 0}\left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{j}\right).$$

VARIABLE COMPLEJA #3

PRODUCTOS INFINITOS, FACTORIZACION DE WEIERSTRASS

3.1. El principio general a aplicarse será que cada concepto relacionado con productos infinitos puede pensarse como si fuera la "exponencial" del concepto correspondiente para sumatorias, pues

$$\text{“}\ \prod z_j = e^{\Sigma \log z_j} = e^{\boldsymbol{\Sigma}\, \zeta_j}\text{”}\ .$$

En un producto queremos admitir la posibilidad de $z_j = 0$, entonces hay que admitir sumandos $\zeta_j = -\infty$ en una sumatoria. Suponiendo que hay un número finito de sumandos $-\infty$, diremos que la sumatoria converge a $-\infty$ cuando los términos distintos del $-\infty$ forman una serie convergente. Esto es diferente de una suma como $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)$ que diverge a $-\infty$.

Definición. Sean $z_j \in \mathbb{C}$. Decimos que $\prod z_j$ converge si (i) sólo un número finito de los z_j son cero: hay N tal que $j \geq N \implies z_j \neq 0$, y (ii) $\prod_{j=N}^{n} z_j$ tiende a un límite no-cero cuando $n \to \infty$.

(pensar qué correspondería en las sumatorias si el límite en (ii) fuera cero)

El valor del producto convergente es 0 si algún factor es 0, de otro modo el valor es $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^n z_j$.

Ejemplo. $\displaystyle\prod_{j=1}^{\infty}(1-\frac{1}{j})$ diverge a cero.

3.2. Proposición. $\prod z_j$ converge $\implies$ $z_j \to 1$ cuando $j \to \infty$.

Proposición. Sean $1+b_j = z_j \notin (-\infty, 0\,]$. Entonces $\prod(1+b_j)$ converge $\iff$ $\sum \log(1+b_j)$ converge, donde log significa la rama principal, $|\arg \log z\,| < \pi$.

3.3. Ejemplo. $\prod(-1)^j$ no converge, pero $\prod |(-1)^j|$ sí converge!

Definición. Decimos que $\prod(1+b_j)$ converge absolutamente cuando $\sum \log(1+b_j)$ converge absolutamente.

Proposición. $\prod(1+b_j)$ converge absolutamente $\iff$ $\sum b_j$ converge absolutamente.

FACTORIZACION DE WEIERSTRASS

Aunque la representación de una función holomorfa $f(z) = \sum_0^\infty c_j z^j$ es útil para muchas cosas, da poca información sobre los ceros de f. Para polinomios, tenemos $p(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$ pero por lo que ya sabemos de productos, sería mejor escribir

$$c(1-\frac{z}{a_1})(1-\frac{z}{a_2})\cdots$$

Igual que con el estudio de las fracciones parciales, no podemos esperar que $\prod(1-z/a_j)$ converja siempre.

Ejemplo. $\operatorname{sen} \pi z$ debiera tener factores $1-z/j$ pero $\prod(1-z/j)$ diverge cuando $z \neq 0$.

3.4. Se ve que
$\prod(1-\frac{z}{a_j})$ converge absolutamente, y uniformemente en compactos
$\iff \sum \frac{1}{a_j}$ converge absolutamente.
Esto pasará cuando hay "pocos" ceros (pensar en $a_j = j^2$ o $a_j = 2^j$). La rapidez de que los ceros tienden al infinito es una forma de medir el "tamaño" de una función entera.

Definición. Sean $a_j \to \infty$ (valores no necesariamente distintos). El exponente de convergencia de la sucesión $\{a_j\}$ es el mínimo entero μ tal que

$$\sum \frac{1}{|a_j|^{\mu+1}} < \infty.$$

Otra medida de una función entera es su tasa de crecimiento. Suponiendo que

$$|f(z)| \leq e^{a|z|^\lambda}$$

para $|z|$ grande, entonces $\log|f| \leq a|z|^\lambda$; $\log\log|f| \leq \log a + \lambda \log|z|$;

$$\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|} \leq \lambda + \frac{\log a}{\log|z|} \leq \lambda + \epsilon$$

para $|z|$ grande.

Definición. El orden de una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es el mínimo número λ tal que $(\forall \epsilon > 0)(\forall z$ grande$)$

$$|f(z)| \leq e^{|z|^{\lambda+\epsilon}}.$$

Si no existe tal número, el orden es $\lambda = \infty$. Tenemos

$$\lambda = \limsup_{z\to\infty} \frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}.$$

Cuando $\lambda < \infty$, el tipo de f es el mínimo a tal que $(\forall \epsilon > 0)(\forall z$ grande$)$

$$|f(z)| \leq e^{(a+\epsilon)|z|^\lambda}.$$

Ejemplo. $\operatorname{sen} z$ tiene orden 1; $\operatorname{sen} 2z$ tiene orden 1; $\operatorname{sen}^2 z$ tiene orden 1; $\operatorname{sen} z^2$ tiene orden 2.

3.5. Definición. Un producto canónico para la sucesión $\{a_j\}$ es cualquiera de la forma

$$\prod_1^\infty \left(1-\frac{z}{a_j}\right) e^{\frac{z}{a_j}+\frac{1}{2}(\frac{z}{a_j})^2+\frac{1}{3}(\frac{z}{a_j})^3+\cdots+\frac{1}{m_j}(\frac{z}{a_j})^{m_j}}.$$

Depende de la elección de los grados m_j de los polinomios $p_{m_j}(z/a_j)$. Con la termínología de un factor canónico, es decir,

$$\begin{aligned} E_0(u) &= 1-u, \\ E_m(u) &= (1-u)e^{p_m(u)} = (1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+\cdots+\frac{1}{m}u^m} \quad (m \geq 1), \end{aligned}$$

un producto canónico es $\prod_1^\infty E_{m_j}(a_j)$.

Teorema. (Factorización de Weierstrass) (a) Sea $a_j \to \infty$. Entonces existe una función entera cuyos ceros son precisamente estos valores a_j (repetidos según su multiplicidad).
(b) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Entonces existen enteros m, m_j y una función entera g tales que

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{j=m+1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{a_j}\right) e^{\frac{z}{a_j}+\frac{1}{2}(\frac{z}{a_j})^2+\cdots+\frac{1}{m_j}(\frac{z}{a_j})^{m_j}}.$$

Corolario. Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Entonces existen $g_1, g_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tales que $f = g_1/g_2$.

Ejemplo. $\cos \pi z = \prod_{m \text{ impar}} (1-\frac{2z}{m})e^{2z/m}$

Nota. Hay resultados similares para $\mathcal{H}(D)$ y $\mathcal{M}(D)$ para cualquier dominio $D \subseteq \mathbb{C}$.

Definición. Sea $a_j \to \infty$ y supóngase que $\{a_j\}$ tiene exponente de convergencia finito μ. Entonces decimos que el producto canónico para $\{a_j\}$ es $\prod E_\mu(z/a_j)$.

Definición. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y si los ceros $\{a_j\}$ de f tienen exponente de convergencia finito y si la función $g(z)$ en la factorización de Weierstrass es un polinomio, entonces decimos que el género de f es

$$\mu = \text{máx}(\text{ exp. de conv. de } \{a_j\},\ \text{grad}(g)\ ).$$

Teorema. (de Hadamard) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de género μ y orden λ. Entonces

$$\mu \leq \lambda \leq \mu + 1.$$

(se omite la demostración)

En particular, si f es una función entera de orden 1 (o sea, de crecimiento no más que exponencial), entonces f admite una factorización sin el factor $e^{g(z)}$,