VARIABLE COMPLEJA II
Lista 6

(entregar: 25 de octubre)

1. Sea $D \subsetneq \mathbb{C}$ un dominio tal que $\overline{z} \in D$ cuando $z \in D$. Supóngase que $f : B_1(0) \to D$ es una transformación conforme tal que $\operatorname{Im} f(0) = 0$ y $f'(0) > 0$. Demostrar que $\operatorname{Im} z > 0 \iff \operatorname{Im} f(z) > 0$.

2. Encontrar una transformación conforme de $B_1(0) \cap P^+$ en $B_1(0)$.

3. Sean $r < s$ y $A_{r,s} = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z| < s\}$. Demostrar que no existe una transformación conforme (o sea, holomorfa y biyectiva) de $A_{0,1}$ en $A_{r,s}$ cuando $r > 0$.

4. Sea $u \in \operatorname{Ar}(B_1(0) \setminus \{0\})$, u acotada. Demostrar que u tiene una extensión a un elemento de $\operatorname{Ar}(B_1(0))$. (Sugerencia: estudiar el comportamiento de un "conjugado armónico" de u.)

5. El *radio conforme* de un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ con respecto a un punto $z_0 \in D$ es por definición el valor $|f'(0)|$ de una transformación conforme $f\colon B_1(0) \to D$ tal que $f(0) = z_0$.
(a) Verificar que el radio conforme no depende de cuál f se escoja con las condiciones indicadas.
(b) Sea $z_0 \in D_1 \subseteq D_2$, $D_1 \neq D_2$. Demostrar que el radio conforme de D_2 es mayor que el radio conforme de D_1 (ambos con respecto a z_0). (Sug: L. de Schwarz)
(c) Para D fijo, encontrar el límite del radio conforme de D con respecto a z cuando $z \to \zeta_0 \in \partial D$.