

VARIABLE COMPLEJA II

Lista 5

(entregar: 9 de abril [pueden consultar textos, internet, etc.])

Para z en el semiplano de la derecha $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ se define

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

1. Demostrar (a) que cuando $\{\operatorname{Re} z > 1\}$, la integral $\Gamma(z)$ ($= \lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{1/M}^N \dots$) existe y Γ es holomorfa en ese semiplano; y (b) que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para $\operatorname{Re} z > 0$; deducir (c) que Γ se extiende a una función meromorfa en todo \mathbb{C} , con polos simples en $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.
2. Demostrar la descomposición como suma de partes singulares más una función entera, $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$. (Sugerencia: substituir la serie de potencias de e^{-t} dentro de $\int_0^1 \cdot$)

$$\text{Sea } \Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^z \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^n ds \text{ para } \operatorname{Re} z > 0.$$

3. (a) Demostrar que $\frac{1}{\Gamma_n(z)} = n^{-z} z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right)$ (producto finito).
 (b) Deducir que $e^{-z(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n)} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$.

La constante de Euler es $\gamma = \lim\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$.

4. Sea $G(z) = z \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$.
 Demostrar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = e^{\gamma z} G(z)$ para $z \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

5. Demostrar $\Gamma_n(z) \rightarrow \Gamma(z)$, luego tenemos una función entera factorizada

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}.$$

6. Demostrar $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$.