VARIABLE COMPLEJA II
Lista 5

(entregar: 18 de octubre [pueden consultar textos, internet, etc.])

Para z en el semiplano de la derecha $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ *se define*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

1. Demostrar (a) que cuando $\{\mathrm{Re}\, z > 1\}$, la integral $\Gamma(z)$ $(= \lim_{M,N\to\infty} \int_{1/M}^N \cdots)$ existe y Γ es holomorfa en ese semiplano; y (b) que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para $\mathrm{Re}\, z > 0$; deducir (c) que Γ se extiende a una función meromorfa en todo $\mathbb{C}$, con polos simples en $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

2. Demostrar la descomposición como suma de partes singulares más una función entera, $\Gamma(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$. (Sugerencia: substituir la serie de potencias de e^{-t} dentro de $\int_0^1$.)

Sea $\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1}\big(1 - \frac{t}{n}\big)^n\, dt = n^z \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^n\, ds$ para $\mathrm{Re}\, z > 0$.

3. (a) Demostrar que $\displaystyle\frac{1}{\Gamma_n(z)} = n^{-z} z \prod_{k=1}^n \big(1 + \frac{z}{k}\big)$ (producto finito).

   (b) Deducir que $\displaystyle e^{-z(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$.

La constante de Euler es $\gamma = \lim(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)$.

4. Sea $\displaystyle G(z) = z \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$.

   Demostrar $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = e^{\gamma z} G(z)$ para $z \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

5. Demostrar $\Gamma_n(z) \to \Gamma(z)$, luego tenemos una función entera factorizada

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}.$$

6. Demostrar $\displaystyle\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$.