

VARIABLE COMPLEJA II

Lista 4

(entregar: 18 de octubre)

1. Expresar el operador laplaciano $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ en términos de coordenadas elípticas (ξ, η) definidas por

$$\begin{aligned}x &= \cosh \xi \cos \eta, \\y &= \sinh \xi \sen \eta.\end{aligned}$$

2. Demostrar que $\text{Ar}(D)$ es cerrado en $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$.
3. Demostrar el Principio de Harnack: Sean $\{u_n\} \subseteq \text{Ar}(D)$, con $u_n(z) \leq u_{n+1}(z)$ para $z \in D$. Entonces, o bien (a) $u_n \rightarrow \infty$ uniformemente en compactos de D , o bien (b) $\{u_n\}$ converge en $\text{Ar}(D)$.
4. Encontrar una $u \in \text{Ar } P^+$ (donde $P^+ = \{\text{Im } z > 0\}$) tal que u es acotada y tiene los siguientes valores en la frontera:

$$\begin{aligned}u(x) &= -1 && \text{si } x < -1, \\u(x) &= 0 && \text{si } -1 < x < 1, \\u(x) &= 1 && \text{si } 1 < x.\end{aligned}$$

(Sugerencia: observar el comportamiento de $\arg z$ en P^+ . Recorrer la variable y y hacer combinaciones.)

5. Encontrar una $u \in \text{Ar}(B_1(0))$ acotada tal que u tiene valores límites

$$\begin{aligned}u(e^{i\theta}) &= 1, && 0 < \theta < \pi, \\u(e^{i\theta}) &= -1, && \pi < \theta < 2\pi.\end{aligned}$$

(Sugerencia: usar una transformación conforme a una banda horizontal.)

6. Sean v_1, v_2 subarmónicas. Demostrar:
 - (a) $v_1 + cv_2$ es subarmónica si $c \geq 0$;
 - (b) $\text{máx}(v_1, v_2)$ es subarmónica.