VARIABLE COMPLEJA II
Lista 3

(entregar: 11 de septiembre)

1. Evaluar la sumatoria $\sum_1^\infty n^{-4}$, empleando la descomposición en fracciones parciales de $\cot \pi z$.

2. Sea $g_2(z) = \displaystyle\sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m+nz)^{-4}$.

   (a) Demostrar que la serie doble converge a una función holomorfa en el semiplano $\{z\colon\ \text{Im}\ z > 0\}$. (Recordar que las series dobles se pueden convertir en series simples, por ejemplo tomando $\{m+n \leq N\}$ e indexando con N.)
   (b) Sea $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ (donde a, b, c, d enteros, $ad - bc = 1$). Demostrar:
$$g_2(T(z))T'(z)^2 = g_2(z).$$

3. Demostrar: $\displaystyle\prod_{k=0}^{\infty}(1 + \frac{1}{2^{2^k}}) = 2.$

4. ¿Cuáles de estos productos convergen/divergen? ¿absolutamente? ¿para cuáles z (en su caso)?

   (a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}(1 + (-1)^k k^{-1/3})$

   (b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k)$, donde
   $a_k = 1/\sqrt{k}$ para k impar, $a_k = -1/\sqrt{k} + 1/k$ para k par.

   (c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}(1 + \frac{z^2}{k^2})$

   (d) $(1 - \frac{z}{1})(1 + \frac{z}{1})(1 - \frac{z}{2})(1 + \frac{z}{2})(1 - \frac{z}{3}) \cdots$