

VARIABLE COMPLEJA II

Lista 2

(entregar: 17 de febrero)

1. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(D)$ una familia normal. Sea $\epsilon > 0$. Demostrar que existe $c > 0$ tal que

$$\{cf: f \in \mathcal{F}\} \subseteq \{f \in \mathcal{H}(D): \rho(0, f) < \epsilon\}.$$

2. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(D)$ una familia normal. Demostrar que la familia

$$\mathcal{F}' = \{f': f \in \mathcal{F}\}$$

también es una familia normal.

3. Sea $f, f_n \in \mathcal{H}(D)$ donde cada f_n es inyectiva. Supóngase que $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(D)$. Demostrar: f es inyectiva o es constante.

4. Se abrevia $(a)_k = a(a+1)(a+2) \cdots (a+k-1)$ para $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^+$ (de manera que $(1)_k = k!$). Sea $a > 0$. Demostrar que $(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-k+1)_k}{k!} z^k$ donde la serie converge uniformemente en compactos de $|z| < 1$.

5. Sea $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{2^j}$. Demostrar que f es holomorfa en $B_1(0)$ y que no existe $z_0 \in \partial B_1(0)$ para el cual f tenga límite as $z \rightarrow z_0, z \in B_1(0)$.

6. Leer <http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/rjchapma/etc/zeta2.pdf> y entender por lo menos las pruebas 1,2,3,6,8,9. (No entregar.)