

VARIABLE COMPLEJA II

Lista 1

(entregar: 9 de febrero)

Notación: $D = \text{dominio en } \mathbb{C}$; $\mathcal{C}(D, \mathbb{C}) = \{\text{funciones continuas de } D \text{ en } \mathbb{C}\}$; $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ significa $(\forall K \subseteq D, K \text{ compacto}) f_n|_K \rightarrow f|_K$ uniformemente; $\mathcal{H}(D) = \{\text{holomorfas en } D\}$.

1. Sea $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase C^2 , con $\alpha(0) = 0$, $\alpha' > 0$, $\alpha'' < 0$. Demostrar: $\alpha(s+t) \leq \alpha(s) + \alpha(t)$ para $s, t \geq 0$.
2. Demostrar: El espacio métrico $(\mathcal{C}(D, \mathbb{C}), \rho)$ es *completo*.
3. Sea $B_1(0) = \{z : |z| < 1\} \subseteq \mathbb{C}$. Encontrar sucesiones $\{f_n\}, \{g_n\}$ en $\mathcal{C}(B_1(0), \mathbb{C})$ tales que
 - (a) $f_n \rightarrow 0$ puntualmente, pero $f_n \not\rightarrow 0$ en $\mathcal{C}(B_1(0), \mathbb{C})$;
 - (b) $g_n \rightarrow 0$ puntualmente, pero $\iint_{B_1(0)} |g_n| dx dy \not\rightarrow 0$
(o sea $g_n \not\rightarrow 0$ en $L_\infty(B_1(0))$)
4. Sea (i) $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ cuando $n \rightarrow \infty$ y sea (ii) $z_n \rightarrow z \in D$ cuando $n \rightarrow \infty$. Demostrar: $f_n(z_n) \rightarrow f(z)$ cuando $n \rightarrow \infty$.
5. Sean $f, f_n \in \mathcal{H}(D)$. Supóngase que para toda curva cerrada y suave por pedazos $\gamma \subseteq D$, se tiene $f_n \rightarrow f$ uniformemente en γ . Demostrar: $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(D)$.
6. Sea $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ para z en $D_0 = \{z : \text{Re } z > 1\}$.
 - (a) Mostrar la suma $\zeta(z)$ existe (función ζ de Riemann).
 - (b) Mostrar que ζ es una función holomorfa.
 - (c) Calcular la derivada $\zeta'(z)$.