Observaciones sobre la Redacción Matemática

Estas reflexiones son para ayudar a redactar matemáticas de una forma que se entienda mejor. El presente es un trabajo en proceso de continuo mejoramiento, tiene por agregarse nuevos ejemplos según se presenten.

"El ojo tiende a ver las expresiones simbólicas como una sola unidad." Esto tiene un profundo efecto en como se tiene que redactar. Error: "El promedio de $x = (1/n)\sum x$." Al primer intento de leer esta oración, parece que no tiene verbo, que simplemente menciona el promedio de algo. Correcto: "El promedio de x es $(1/n)\sum x$." Correcto: "El promedio de x es $p = (1/n)\sum x$."

Normalmente se considera inapropiado comenzar una oración con un símbolo matemático. Esto es porque es imposible poner el símbolo en mayúsculas sin cambiar su significado. Así que en lugar de "Ya sabemos sobre x. $x \in A$ implica que $y \in B$." hay que agregar una palabras de relleno al inicio de la oración, como "Ya sabemos sobre x. El hecho de que $x \in A$ implica que $y \in B$."

Una confusión común es *pensar que los símbolos matemáticos simplemente son abreviaturas para expresiones* escritas o pronunciadas es decir, que representan palabras. Así en

$$x > 1$$

$$x \equiv 1$$

parece que "$>$" representa las palabras "es mayor que" y que "$\equiv$" representa "es equivalente a". Pero el significado matemático de los símbolos es independiente del idioma en el cual se leen, y de hecho ya en un mismo idioma se pueden leer de más de una forma. En "$x > 1$" el símbolo "$>$" podría representar un adjetivo en un idioma y un verbo en otro; (quizás en algún país digan "x domina a 1"). Si escribimos "x es $>$ que 1" entonces estamos usando los símbolos sólo como taquigrafía; otra persona podría escribir "x es > 1" sin escribir la palabra "que". Entonces el símbolo "$>$" representaría en un caso "mayor" en el otro "mayor que". Notemos la diferencia en

$$\text{Sabemos que } x < 1.$$

$$\text{Para todo } x < 1, \text{ tenemos } y > 2.$$

En el ejemplo de arriba, $x < 1$ *no* podría ser "x que es mayor que 1", mientras en el de abajo necesario agregar "que" para entenderlo bien. Estos ejemplos son para mostrar que no es sostenible la idea que el simbolo $<$ sea simplemente una abreviatura para unas palabras específicas. Más bien, forma parte de una *expresión matemática* que representa un *concepto*.

Otra consecuencia del hecho que los símbolos no son meramente abreviaturas para palabras es que *los cuantificadores lógicos no se deben aplicar a expresiones que no sean proposiciones.* Por ejemplo,

$$(\forall x) \text{ apliquemos el proceso al conjunto } E_x$$

no es correcto. "Apliquemos…" no es un proposición, porque no se le puede asignar un valor de verdadero/falso. Se tiene que escribir en palabras "Para cada x," explícitamente.

Un ejemplo similar es "Definimos $(\forall n)$ $E_n = \{\cdots\}$." Aquí la situación está menos clara. Según los principios planteados aquí, no es apropiado escribir $(\forall n)$ para indicar algo que *hacemos* para cada n, debe ser para una proposición que es *válida* para cada n. Podríamos entenderlo como correcto si entendiéramos "Definimos una collección de conjuntos $\{E_n\}$ tal que $(\forall n)$ $E_n = \{\cdots\}$." Pero esto probablemente no sea como el autor de la expresión original quería dar a entender, que es "Para cada n, definimos…"

En general, podemos considerar como válida la siguiente observación: *Una expresión matemática dentro de una redacción matemática podría actuar como sustantivo o bien como enunciado completo.* Veamos unos ejemplos.

Como sustantivo:

> Sabemos que $\{x : x \in A\}$ es finito.
>
> La proposición $x \in A$ es falsa.
>
> La proposición $x \in A$ es equivalente a $y \in B$.

Como enunciado (o sub-enunciado):

> Sabemos que $x \in A$.

Si $x \in A$, entonces $y \in B$. Tanto $x \in A$ como $y \in B$.

Todos los x_i son positivos y $\sum x_i = 1$, mientras $y \in B$.

Según el uso de cada caso, el lector siempre tiene que esforzarse por determinar si la expresión matemática actúa como sustantivo o como enunciado completo. El que redacta quiere minimizar este esfuerzo. Observe lo que pasa con "$y \in B$":

Todos los x_i son positivos, $\sum x_i = 1$ y cada $y \in B$ es negativo.

Aquí el lector tiene que darse cuenta que "cada" se refiere a "y" y no a "$y \in B$". Un ejemplo similar es "Cada $y < 1$ está en B". Este proceso de análisis es una capacidad intelectual del lector, y no hay que sobrecargarla o peor aún, darle situaciones imposibles.

A veces la primera letra en una expresión puede usarse como el sujeto del verbo, como "Supongamos que $x > 1$." Aquí es muy diferente que en "Supongamos que $x > 1$ es un entero." La segunda implica más esfuerzo de parte del lector, pero no es imposible. Una redacción como "Supongamos que $1 < x < 200$ es un entero" ya es problemática pues no deja claro cuál sería el sujeto del verbo "es". Peor aún: "Supongamos que $a < x < b$ es un entero". Lo que pasa es que en este ejemplo la referencia no es al *primer* símbolo en la expresión matemática.

Otro ejemplo: ¿cuáles de los siguientes son correctos?

(a) Como los racionales son densos en $\mathbb{R}$, $(x, x + 1/n) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

(b) Como los racionales son densos en $\mathbb{R}$, tenemos $(x, x + 1/n) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

(c) Como los racionales son densos en $\mathbb{R}$, el intervalo $(x, x + 1/n) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

La pregunta que hay que hacerse siempre es ¿Cuál es el verbo? En (a) no hay problema porque $(x, x + 1/n) \cap \mathbb{Q} \neq 0$ es un enunciado completo, luego "contiene su verbo" no importa cómo se lea. En (b) tampoco hay problema, y es un poco mejor que el anterior porque la palabra “tenemos” sirve para separar dos símbolos matemáticos. En (c) el autor probablmente pensaba que estaba aclarando las cosas con las palabras “el intervalo”, pero resulta que las empeora, pues requiere que mucho trabajo encontrar el verbo. La expresión simbólica $(x, x+1/n) \cap \mathbb{Q} \neq 0$ contiene el sinónimo de “el intervalo” pero no *es* el sinónimo. Por eso (c) no está redactado correctamente. Es uno de los errores más comunes. Si uno realmente quiere poner el sinónimo, debería escribir “Como los racionales son densos en $\mathbb{R}$, el intervalo $(x, x+1/n)$ intersecta a $\mathbb{Q}$ en $\emptyset$” o mejor “. . . la intersección del intervalo $(x, x+1/n)$ con $\mathbb{Q}$ no es vacía.”

En el intento “Entonces $\exists m \geq 2$ tal que $A_m \cap B_m \neq \emptyset$” se está usando “$\exists m \geq 2$” más bien como abreviatura de una expresión hablada. Sería mejor decir “Entonces existe $m \geq 2$ tal que $A_m \cap B_m \neq \emptyset$” o bien todo en símbolos, “Entonces $\exists m \geq 2 : \ A_m \cap B_m \neq \emptyset$”.

Notar que las expresiones simbólicas tienden a formar unidades más inseparables que las palabras que las rodean:

> “El lado derecho tiende a $0 \Leftrightarrow n = 0$” parece al ojo contener una expresión “$0 \Leftrightarrow n = 0$”, que no tiene sentido. Así “El lado derecho tiende a cero $\Leftrightarrow n = 0$” o mucho mejor: “El lado derecho tiende a 0 si y sólo si $n = 0$”

Otra falla lógica ocurre cuando se mezcla el nivel de los objetos matemáticos con el nivel de las personas que estudian estos objetos.

> “Si consideramos la sucesión $\inf_j a_{nj}$, entonces esta sucesión es creciente.”

¿Significa esto que si no la consideramos, entonces la sucesión podría no ser creciente? Mejor reservar la palabra “si” para condiciones matemáticas.

> “Si sumamos de $n = 0$ a $n = N$, entonces f es continua.” (La continuidad de r no depende de si sumamos o no.) Mejor sería

"Si sumamos de $n = 0$ a $n = N$, entonces vemos f es continua." Aquí la palabra "Si" no se aplica a la lógica matemática, pero es correcto usarlo.

Uno de los errores más frecuentes viene del *mal uso del símbolo* $\Rightarrow$. Algunos quieren usarlo como abreviatura de la palabra "entonces", por ejemplo "Si $x = 2 \;\Rightarrow\; x^2 = 4$." En principio no se puede prohibir el uso de símbolos como abreviaturas de palabras, pero en este caso el hacerlo impide que el mismo símbolo pueda significar "implica", que es su uso común, "Es fácil ver que $x = 2 \;\Rightarrow\; x^2 = 4$." Yo leería la primer expresión como "Si $x = 2$ implicara $x^2 = 4$ (entonces...)" El intentar usar el símbolo con ambos sentidos (implica/entonces) conlleva a grandes confusiones. Consideremos la afirmación "Si $f \in L_p$, entonces $\|f\|_p < \infty$." El abreviarla "Si $f \in L_p \;\Rightarrow\; \|f\|_p < \infty$" puede parecer inocuo, pero consideremos cómo hacerlo si uno quiere expresar "Si $f \in L_p$ implicara $\Phi[f] < \infty$, entonces..." Con símbolos tenemos "Si $f \in L_p \;\Rightarrow\; \Phi[f] < \infty$, entonces..." la cual es una expresión matemática perfectamente bien hecha, en la que el grupo de todos los símbolos forma una sub-oración completa. El uso de $\Rightarrow$ para "entonces" ¡tiene la consecuencia que esta expresión ya no se pueda utilizar! Una buena regla a seguir es *No usar* $\Rightarrow$ *para "entonces".*

Lo anterior se vuelve aún más claro si consideramos la redacción de las demostraciones. Digamos que se quiere demostrar que $x \in A$, y se pone algo como

$$\begin{aligned} x \in C \quad &\Rightarrow \quad \ldots \\ &\ldots \\ &\Rightarrow \quad x \in A \cap B \quad \Rightarrow \quad x \in A. \end{aligned}$$

En este momento se ha demostrado que algo *implica* que $x \in A$, que no es lo mismo que *afirmar* que $x \in A$. Entonces la "demostración" todavía no está completa, hace falta "Por lo tanto $x \in A$" para cerrarla. (Una alternativa sería de poner una declaración anterior a "$x \in C\ldots$" como "La siguiente implicación completa la demostración".) Una regla a seguir es *No usar* $\Rightarrow$ *antes de una oración con la finalidad de afirmarla.* Más bien, usar $\Rightarrow$ para señalar cosas que todavía no quieres afirmar.

La expresión "Sabiendo que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1 \iff \lim_{n\to\infty} n^{1/n} - 1 = 0 \ldots$," puede haberse escrito con la intención de comenzar con algo conocido, $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ y progresar a algo que hace falta en la demostración, $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} - 1 = 0$. Esto se entendería si el símbolo " $\iff$ " se leyera en voz alta como "lo cual es equivalente a". Pero es difícil para el lector adivinar las palabras "lo cual", y si lo lee de la manera normal "es equivalente a", la expresión matemática se trata de una equivalencia, algo que no es tan importante en la discusión.