PDES DE 1ER ORDEN $\#9$

Ecuaciones Pfaffianas

9.1. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. $P = (P_1, \ldots, P_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, $P(x) \neq (0, \ldots, 0)$.
Forma diferencial pfaffiana: $\sum_{i=1}^n P_i \, dx_i$.
El valor aplicado a en $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ en el punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ es

$$\sum_{i=1}^n P_i(x_1, \ldots, x_n) \, v_i = \langle P(x), \ v \rangle.$$

Definición. Sea $S \subseteq \Omega$, m-dimensional, parametrizado por una función C^1 $x(\lambda) = x(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ for $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$. La ecuación diferencial pfaffiana

$$\sum_{i=1}^n P_i(x_1, \ldots, x_n) \, dx_i = 0 \tag{1}$$

se verifica en S cuando para cada curva $\lambda \colon I \to \Lambda$ de clase C^1 ,

$$\sum_{i=1}^n P_i(\lambda(s)) \, \frac{d}{ds}(x_i(\lambda(s)) = 0 \tag{2}$$

para cada $s \in I$. Se dice que S es m-variedad integral de la forma pfaffiana. La forma pfaffiana es m-integrable cuando para cada $x \in \Omega$ hay una única m-variedad integral $S \subseteq \Omega$ que contiene x. Las forma es completamente integrable cuando es $(n-1)$-integrable (Ω es unión de hipersuperficies integrales).

1-variedad integral = curva integral.
2-variedad integral = superficie integral.

"$P = 0$ a lo largo de S", $\sum_{i=1}^n P_i \, (x_i \circ \lambda)' = 0$, $\langle P, \, (x \circ \lambda)' \rangle = 0$.

9.2. Proposición. El ser m-variedad integral no depende de la parametrización: si $\lambda = \psi(\tilde{\lambda})$, con $\psi \colon \widetilde{\Lambda} \to \Lambda$ difeomorfismo, entonces

$$\sum_{i=1}^n P_i(\psi(\tilde{\lambda}(s))) \, \frac{d}{ds}(x_i(\psi(\tilde{\lambda}(s))) = 0$$

para cada curva $\tilde{\lambda}\colon I \to \widetilde{\Lambda}$ de clase C^1.

9.3. Proposición. $\sum P_i\, dx_i = 0$ es m-integrable si y sólo si para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x(\lambda))\, \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k}(\lambda) = 0 \quad (1 \le k \le m).$$

Ejemplo. $2x_3x_4^5\, dx_1 - 2x_3^2\, dx_2 - 2x_2x_3\, dx_3 + 10x_1x_3x_4^4\, dx_4$
en $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^4\colon\ x_i > 0\ (1 \le i \le 4)\}$.
Sea

$$S = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda_1\lambda_2,\ \lambda_1\lambda_3^2,\ \lambda_2\lambda_3^3,\ \lambda_3)\ (\lambda_k > 0)\big\}$$

Para $k = 1$,

$$\begin{aligned} P_1(x)\, \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} &+ P_2(x)\, \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} + P_3(x)\, \frac{\partial x_3}{\partial \lambda_1} + P_4(x)\, \frac{\partial x_4}{\partial \lambda_1} \\ &= 2(\lambda_2\lambda_3^3)(\lambda_3)^5(\lambda_2) + (-2)(\lambda_2\lambda_3^3)^2(\lambda_3^2) \\ &\quad + (-2)(\lambda_1\lambda_3^2)(\lambda_2\lambda_3^3)(0) + (10)(\lambda_1\lambda_2)(\lambda_2\lambda_3^3)(\lambda_3)^4(0) \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

(similar para $k = 2, 3$)
Se puede realizar el calculo con diferenciales:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \lambda_2\, d\lambda_1 + \lambda_1\, d\lambda_2, \\ dx_2 &= \lambda_3^2\, d\lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_3\, d\lambda_3, \\ dx_3 &= \lambda_3^3\, d\lambda_2 + 3\lambda_2\lambda_2\, d\lambda_3, \\ dx_4 &= d\lambda_3, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 2(\lambda_2\lambda_3^3)(\lambda_3)^5 = 2\lambda_2\lambda_3^8, \\ P_2(x) &= (-2)(\lambda_2\lambda_3^3)^2 = -2\lambda_2^2\lambda_3^6, \\ P_3(x) &= (-2)(\lambda_1\lambda_3^2)(\lambda_2\lambda_3^3) = -2\lambda_1\lambda_2\lambda_3^5, \\ P_4(x) &= (10)(\lambda_1\lambda_2)(\lambda_2\lambda_3^3) = 10\lambda_1\lambda_2\lambda_3^3. \end{aligned}$$

Combinando,

$$\sum_{i=1}^{4} P_i(x)\,dx_i =$$

$$\Big((2\lambda_2\lambda_3^8)(\lambda_2\,d\lambda_1 + \lambda_1\,d\lambda_2)\Big) + \Big((-2\lambda_2^2\lambda_3^6)(\lambda_3^2\,d\lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_3\,d\lambda_3)\Big)$$
$$+ \Big((-2\lambda_1\lambda_2\lambda_3^5)(\lambda_3^3\,d\lambda_2 + 3\lambda_2\lambda_2\,d\lambda_3)\Big) + \Big((10\lambda_1\lambda_2\lambda_3^3)(d\lambda_3)\Big).$$

Agrupar cada $d\lambda_k$, ver que los coeficientes son 0.

9.4. Definición. $\sum P_i dx_i$ es exacta si hay $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $P = \nabla f$.

Proposición. Toda diferencial pfaffiana es completamente integrable. Las hipersuperficies integrables son los conjuntos de nivel $\{x \in \Omega\colon\ f = c\}$, $c \in \mathbb{R}$.

9.5. Una $\mu\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es factor integrador de $\sum_{i=1}^{n} P_i\,dx_i$ cuando $\sum_{i=1}^{n} \mu\,P_i\,dx_i$ es exacta.

Notar $\mu(x) \neq 0$ para $x \in \Omega$. *Si existe un factor integrador μ, la ecuación es completamente integrable.*

9.6. Sea $n = 2$:

Proposición. Sea $P_1, P_2\colon I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Entonces toda pfaffiana $P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 = 0$ tiene un factor integrador.

9.7. Si x_2 se expresa como función de x_1 en curvas integrales,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{P_1}{P_2}$$

en cada $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. Las curvas integrales de $P_1dx_1 + P_2dx_2$ son las curvas integrales del campo vectorial $-P_1/P_2$.

Ejemplo. $dx_1 - dx_2 = 0$, o sea , $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = -1$.
Ecuaciones características $x_1'(s) = 1$, $x_2'(s) = -1$,
que dan. $x_1(s) = s + c_1$, $x_2(s) = -s + c_2$.
Luego $x_1 + x_2$ es constante en características, que son las 1-variedades integrales.

9.8. Caso particular: Supongamoe

$$\frac{(\partial P_1)_{x_2} - (\partial P_2)_{x_1}}{P_2} = g(x_1)$$

es función de x_1. En tal caso definir $\mu(x_1, x_2) = e^{\int g(x_1)\,dx_1}$. Engonces μ es factor integrador para $P_1 dx_1 + P_2 dx_2$.

9.9. Proposición. Las curvas integrales $P_2 dx_1 - P_1 dx_2$ son ortogonales a las curvas integrales de $P_1 dx_1 + P_2 dx_2$.

9.10. Lema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, con $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Entonces cerca de un punto dado de Ω, existe $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $h'(x) \neq 0$ con $g = h \circ f$ sí y solo sí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1}.$$

9.11. $n = 3$: $P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + P_3\,dx_3$.

Proposición. Hay una curva integral en cada punto de Ω.

9.12. Ejemplo. $x_2\,dx_1 - dx_3 = 0$, en $\Omega = \mathbb{R}^n$. Así $P_1(x) = x_2$, $P_2(x) = 0$, $P_3(x) = -1$. La ODE es $x_2(s)\,x_1'(s) - x_3'(s) = 0$.
Siempre tiene soluciones. Como ejemplo supongamos $x_2(s)$ constant, luego para $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^n$ dado como valor inicial,

$$x(s) = (s + x_1^0,\ x_2^0,\ x_2^0 s + x_3^0)$$

es curva integral.

9.13. Proposición. Sea $\Omega = I_1 \times I_2 \times I_3$, sea P de clase C^2 en Ω. La pfaffiana es completamente integrable si y sólo si

$$\langle P(x),\ \operatorname{rot} P(x)\rangle = 0.$$

for all $x \in \Omega$.

9.14. Ejemplo. $x_2\,dx_1 - x_3 = 0$:

$$\operatorname{rot} P = \operatorname{rot}(x_2,\ 0,\ -1) = (0-1,\ 0-0,\ 0-1),$$

luego

$$\langle P,\ \operatorname{rot} P\rangle = \langle (x_2,\ 0,\ -1),\ (-1,\ 0,\ -1)\rangle = 1 - x_2.$$

Por lo que P no tiene integral completa:

9.15. Procedimiento para pfaffianas en 3D: (1) Verificar condicion de integrabilidad. (2) Si la cumple, resolver $P_1 dx_1 + P_2 dx_2 = 0$ (2-dimensional) para x_3 fijo, dando f, μ. (3) Resolver $\phi'(x_3) = f_{x_3}(x) - \mu(x) P_3(x)$ (garantizado ser ODE). (4) Las superficies integrales son $\{f = \phi\}$ donde ϕ depende de una constante arbitraria.

Ejemplo. $x_2 x_3\, dx_1 + x_1 x_3\, dx_2 + x_1 x_2\, dx_3 = 0$ en $\mathbb{R}^3$.
Aquí $P_1 = x_2 x_3,\ P_2 = x_1 x_3,\ P_3 = x_1 x_2$,

$$\operatorname{rot} P = (x_1 - x_1,\ x_2 - x_2,\ x_3 - x_3) = 0.$$

Ahora resolver $x_2 x_3 dx_1 + x_1 x_3 dx_2 = 0$ para x_3 fijo:
dividir entre $x_1 x_2 x_3$,

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} = 0,$$

luego $f(x) = x_1 x_2$ es constante. Luego $f_{x_1} = x_2,\ f_{x_1} = x_1$, que dice que el factor integrador es $\mu(x) = 1/x_3$. En este ejemplo $f_{x_3} = 0$, luego

$$-\phi'(x_3) = \frac{1}{x_3} x_1 x_2 = \frac{1}{x_3} f(x) = \frac{1}{x_3}\phi(x_3)$$

en la superficie donde $f = \phi$. Ésta es ODE, con solución

$$\phi(x_3) = \frac{c}{x_3}.$$

Las superficies integrales se definen por $x_1 x_2 = c/x_3$, o sea

$$x_1 x_2 x_3 = c.$$

(válido aún cuando algun $x_i = 0$)

9.16. Casos especiales:

Por inspección (exacta, o fácil de hacer exacta)

Variables separables $P_1(x_1)dx_1 + P_2(x_2)dx_2 + P_3(x_3)dx_3$

Una variable separada

Coeficientes homogéneas.