PDES DE 1ER ORDEN $\#8$

Problemas de frontera

8.1. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ (ó $\Gamma \subseteq \Omega$), $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}$. La condición $u(x) = g(x)$ para todo $x \in \Gamma$ es una condición de Dirichlet para una función continua $u\colon \Omega \cup \Gamma \to \mathbb{R}$.

Una PDE con una condición de Dirichlet

$$F(\nabla u, u, x) = 0,\ \ u|_\Gamma = g$$

es un problema de Cauchy.

Cuando $\Gamma \subseteq \partial\Omega$: condición de frontera, problema de frontera (BVP). Para PDEs dependiente del tiempo, una condición de Cauchy de la forma $u(x, t_0) = g(x)$ para $u\colon \Omega \times I \to \mathbb{R}$, es una condición inicial.

8.2. Ejemplo. $u_{x_1} + u_{x_2} = u^2$ en Ω, $u = g$ en Γ. con $\Omega = \{x\colon\ x_2 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \{x \in \partial\Omega\colon\ x_2 = 0\}$.

Vimos que la integral general es

$$u(x) = \frac{-1}{x_1 + w(x_1 - x_2)}$$

La condición de frontera $u(x_1, 0) = g(x_1, 0)$ da

$$\frac{-1}{x_1 + w(x_1)} = g(x_1, 0),$$

luego

$$w(x_1) = -x_1 - \frac{1}{g(x_1, 0)}.$$

Por lo tanto

$$u(x) = \frac{g(x_1 - x_2)}{1 - x_2\, g(x_1 - x_2)}.$$

8.3. Ejemplo.

$$x_2^2 u_{x_1} + x_1 x_2 u_{x_2} = x_1,\ \ u = x_2^2 \text{ en } x_1 = 0.$$

La integral general es

$$u = \log|x_2| + w(x_1^2 - x_2^2).$$

De los datos de frontera,

$$u(0, x_2) = \log|x_2| + w(-x_2^2) = x_2^2.$$

luego $w(z) = -z - \log\big(|z|^{1/2}\big)$ y la solución es

$$u(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2 - \log\big(|x_1^2 - x_2^2|^{1/2}\big) + \log|x_2|.$$

8.4. No toda condición de frontera es apropiada para una PDE dada. Definición. Un problema de frontera está bien planteada si tiene una solución única u y si para toda variación pequeña de las funciones definidoras F y g, la BVP correspondiente también tiene una solución única y esta solución es cercana a u.

8.5. Supóngase que Γ es curva característica $x(\cdot, \lambda)$ para un valor $\lambda \in \Lambda$ en particular, que pasa por $x^0 = x(s_0, \lambda) \in \Omega$. Sea g en Γ arbitraria, dando la condición de Dirichlet $u(x) = g(x)$ para $x \in \Gamma$. Supongamos

$$F(p^0(\lambda),\ z^0(\lambda),\ x^0(\lambda)) = 0,$$
$$z_{\lambda_k}(s_0, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i(s_0, \lambda)\,(x_i)_{\lambda_k}(s_0, \lambda),$$

Por el teorema general, la solución de la ODE está determinada sobre la curva característica para λ por el punto $x(\cdot, \lambda)$, y el valor inicial $z^0(\lambda)$, entonces $u(x) = z(s, \lambda)$ para $x \in \Gamma$. Si $g(x(s, \lambda))$ no coincide con $z(s, \lambda)$, no se puede resolver el BVP.

Tampoco está bien planteado el problema cuando Γ toca una característica en más de un punto.

8.6. ¿Para cuáles condiciones iniciales

$$x(s_0) = x^0,\ z(s_0) = z^0,\ p(s_0) = p^0.$$

está bien planteado? Primero,

$$F(p^0,\ z^0,\ x^0) = 0.$$

Segundo,

$$z^0 = g(x^0).$$

para que la solución con $u(x^0) = g(x^0)$ valga $z(x(s_0))$ en la característica.

Tercero, p^0 no es arbitrario. Supongamos que se puede extender g de clase C^1 en una región que contiene a Γ (para hablar de derivadas parciales). Consideremos una curva $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ en Γ con $y(0) = x^0$. La condición frontera pide

$$u(y(t)) = g(y(t))$$

para todo t. La derivada:

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x^0)\, y_i'(0) = \sum_{i=1}^{n} g_{x_i}(x^0)\, y_i'(0).$$

Por ser arbitraria la curva en Γ su vector tangente $(v_1, \ldots, v_n) = (y_1'(0), \ldots, y_n'(0))$ es arbitrario en el espacio tangente a Γ en x^0. Luego el vector $p^0 = p(s_0) = \nabla u(x^0)$ satisface la tercera condición de compatibilidad

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\, p_i^0 = \sum_{i=1}^{n} v_i\, g_{x_i}(x^0),$$

eso es, $\langle v, p^0 \rangle = \langle v, \nabla g(x^0) \rangle$, para todo vector tangente v a Γ. Esto dice $p^0 - \nabla g(x^0) \perp v$, cada vez que $v \in \mathbb{R}^N$ satisface $v \perp \vec{n}(x^0)$. La tercera condición de compatibilidad es equivalente

$$p^0 - \nabla g(x^0) \text{ es múltiplo de } \vec{n}(x^0).$$

Se dice p^0 es compatible con z^0,x^0 para el BVP si se satisfacen las tres condiciones de compatibilidad.

8.7. Si por suerte Γ está en un hiperplano con una coordenada constante en $\mathbb{R}^n$, como

$$\Gamma \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \ x^n = c\},$$

entonces el normal a Γ es $\delta_n = (0, \ldots, 0, 1)$ y los vectores tangentes son $(v_1, \ldots, v_{n-1}, 0)$, generados por δ_i $(1 \leq i \leq n-1)$. La tercera condición de compatibilidad es

$$p_i^0 = g_{x_i}(x^0) \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

8.8. Las condiciones de compatibilidad dan la manera de formular "condiciones de frontera no-características". Sea (p^0, z^0, x^0) compatible. Queremos una condición suficiente para dar una solución única *cerca de* $x^0 \in \Gamma$. El primer paso es encontrar condiciones compatibles para puntos de Γ cerca de x^0.

<u>Proposición.</u> Sea (p^0, z^0, x^0) compatible para el problema de Cauchy. Supongamos

$$\langle \nabla_v F(p^0, z^0, x^0),\ \vec{n}(x^0) \rangle \neq 0.$$

Parametricemos Γ por $y(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $y(0) = x^0$. Entonces existe una función $p(\lambda)$ en una vecindad de $\lambda = 0$ tal que $(p(\lambda),\ f(y(\lambda)),\ y(\lambda))$ es compatible.

8.9. <u>Demostración.</u> Definir para $\lambda \in \Lambda$, $r \in I$ $(0 \in I)$,

$$\psi(\lambda, r) = y(\lambda) - r\,\vec{n}.$$

y es diferenciable, $\psi(\lambda, r) \in \Omega$ para $r > 0$ (con I pequeño). Además $\psi(0,0) = x^0$, y es invertible cerca de x^0 (pues cada punto de Γ cerca de x^0 se proyecta en la dirección de $\vec{n}$ a un punto único de Ω. Para $\tilde{v} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{u} \in \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \Lambda \times I$ (o sea $\tilde{x} = (\lambda, r)$) definir

$$\widetilde{F}(\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{x}) = F(\tilde{v}\,(J_\psi(\tilde{x}))^{-1},\ \tilde{u},\ \psi(\tilde{x})),$$

(J_ψ = Jacobiana) Notar que dada $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1, podemos definir $\tilde{u}\colon \Lambda \times I \to \mathbb{R}$ por $\tilde{u} = u \circ \psi$, o sea $\tilde{u}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = u(x_1, \dots, x_n)$.

Por la regla de la cadena $\nabla\tilde{u} = ((\nabla u) \circ \psi) J_\psi$, luego

$$(\nabla u) \circ \psi = (\nabla \tilde{u})(J_\psi)^{-1},$$

lo cual da

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(\nabla u(\tilde{x}),\ \tilde{u}(\tilde{x}),\ \tilde{x}) &= F(\nabla\tilde{u}(\tilde{x}) J_\psi(\tilde{x})^{-1},\ \tilde{u}(\tilde{x}),\ \psi(\tilde{x})) \\ &= F(\nabla u(x),\ u(x),\ x).\end{aligned}$$

Así $\tilde{u}$ es solución de la PDE de $\widetilde{F}$ si y sólo si u es solución de la PDE de F. Definamos $\tilde{g}\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{g} = g \circ f,$$

dando un BVP nuevo

$$\widetilde{F}(\nabla\tilde{u}, \tilde{u}, \tilde{x}) = 0, \quad \tilde{u}|_\Lambda = \tilde{g},$$

con una correspondencia 1-a-1 entre soluciones de las dos PDEs. Las condiciones de compatibilidad para $\widetilde{F}$ son

$$\widetilde{F}(\tilde{p}^0,\ \tilde{z}^0,\ \tilde{x}^0) = 0, \tilde{z}^0 \quad = \tilde{g}(\tilde{x}^0), \tilde{p}^0_k = \tilde{g}_{\lambda_k}(\tilde{x}^0) \quad (1 \le k \le n-1),$$

8.10. La primera condición de compatibilidad para $\widetilde{F}$ es válida cuando $\tilde{x}^0 = (0,0) \in \Lambda \times I$, $\tilde{z}^0 = z^0$, $\tilde{p}^0_k = \tilde{g}_{\lambda_k}(\tilde{x}^0)$, la segunda es trivial. Veamos la tercera. Tenemos $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, r)$. Por definición de $\tilde{p}^0$, su k-ésima entrada, $1 \le k \le n-1$ es

$$\begin{aligned}(\tilde{p}^0)_k &= \sum_{j=0}^{n} p^0_j\,(\psi_j)_{\tilde{x}_k} = \sum_{j=0}^{n} p^0_j\,(y_j)_{\lambda_k} \\ &= \sum_{j=0}^{n} g_{x_j}(x^0)\,(y_j)_{\lambda_k} = \tilde{g}_{\lambda_k}(\tilde{x}^0),\end{aligned}$$

usando otra vez la regla de la cadena y usando

$$((y_1)_{\lambda_k},\ \ldots,\ (y_n)_{\lambda_k}) \perp \vec{n}$$

pues $y = \psi(\lambda) \in \Gamma$ y $\vec{n}$ es ortogonal a Γ.

Ahora con la compatibilidad en $\tilde{x}^0 = 0$, Se extiende a puntos cercanos pues

$$\begin{aligned}\tilde{v} J_\psi(\tilde{x})^{-1} &= (\tilde{v}_1,\ \cdots,\ \tilde{v}_n) \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \\ &= (* + \tilde{v}_n (h_n)_{x_1}, * + \tilde{v}_n (h_n)_{x_2}, \ldots, * + \tilde{v}_n (h_n)_{x_n})\end{aligned}$$

donde "$*$" son cantidades sin $\tilde{v}_n$, luego

$$\widetilde{F}_{\tilde{v}_n}(\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} F_{v_i}\,(h_n)_{x_i}$$

Tenemos la hipótesis $\sum_{i=1}^{n} F_{v_i}\vec{n}_i \ne 0$ en (p^0, z^0, x^0). Además, las últimas derivadas parciales de entradas de $J_\psi(\tilde{x})$ son

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial r} = -\vec{n}_i.$$

Por lo tanto

$$\widetilde{F}_{\tilde{v}_n}(\tilde{p}^0, \tilde{z}^0, \tilde{x}^0) \neq 0.$$

Definamos $\tilde{p}_k(\lambda) = \tilde{g}_{\lambda_k}(\lambda)$ para $1 \leq k \leq n-1$, de manera que $\tilde{p}_k(0) = p_k^0$. Para $\lambda \in \Lambda$, consideramos

$$G(\lambda,\ \tilde{p}_n) = \widetilde{F}(\tilde{p}_1(\lambda),\ \ldots,\ \tilde{p}_{n-1}(\lambda),\ \tilde{p}_n,\ \tilde{g}(\lambda),\ \lambda)$$

como función de $\tilde{p}_n$. Esta función vale 0 en $\lambda = 0$, con $\tilde{p}_n = \tilde{p}_n^0$. Luego $(\partial G/\partial \tilde{p}_n)(\tilde{p}_n^0) \neq 0$; por el teorema de la función implícita hay una $\tilde{p}_n(\lambda)$ de clase C^1 para la cual $G(\lambda, \tilde{p}_n(\lambda)) = 0$ en una vecindad de $\lambda = 0$, y tal que $\tilde{p}_n(0) = p_n^0$. Usamos p_n para definir

$$\tilde{p}(\lambda) = (\tilde{p}_1(\lambda),\ \ldots,\ \tilde{p}_n(\lambda)).$$

Por construcción, $(\tilde{p}(\lambda), \tilde{g}(\lambda), \tilde{\lambda})$ es compatible para $\widetilde{F}$, $\tilde{g}$.

Invertiendo el razonamiento anterior, tenemos que $(p(\lambda), g(\lambda), \lambda)$ es compatible para el BVP para F, g.

8.11. La desigualdad

$$\langle \nabla_v F(p^0, z^0, x^0),\ \vec{n}(x^0) \rangle \neq 0.$$

es la <u>condición no-característica</u> para la condición inicial (p^0, z^0, x^0) para la BVP.

8.12. <u>Corolario.</u> Dada la condición no-característica, donde (p^0, z^0, x^0) es una condición inicial compatible para el problema de Cauchy, con $x^0 \in \Gamma$. Sea $(p(y), g(y), y)$ un triple compatible con $p(x^0) = p^0$ para $y \in \Gamma$ cerca de x^0. Sean $p(s, y)$, $z(s, y)$, $x(s, y)$ las soluciones del sistema característico para F determinadas por $(p(y), g(y), y)$. Sean F, P, g de clase C^2. Entonces hay una vecindad de x^0 en Ω en que la función

$$x \colon I \times (V \cap \Gamma) \to \Omega$$

es 1-a-1. La función inversa $\phi \colon \Omega \to I \times \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ es de clase C^2.

8.13. <u>Demostración.</u> Parametrizar Γ por $y = y(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Ya construimos $\widetilde{F}$, $\tilde{g}$ por un cambio de variable, con el triple compatible $(\tilde{p}(\lambda),\ \tilde{f}(y(\lambda)),\ \tilde{y}(\lambda))$.

Sea $\tilde{p}(s,y)$, $\tilde{z}(s,y)$, $\tilde{x}(s,y)$ las soluciones a las ecuaciones características para $\widetilde{F}(\nabla\tilde{u}(x),\tilde{u}(x),x)=0$ con valores iniciales $(\tilde{p}(\lambda),\tilde{g}(\lambda),\tilde{\lambda})$. Entonces $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)$ con $\tilde{x}(0,\lambda)=(\lambda,0)\in\Lambda\times\{0\}$. Como $\tilde{x}^0=(0,0)\in I\times\Lambda$, las derivadas parciales de las componentes de $\tilde{x}(\lambda,s)$ en 0 son

$$\begin{aligned}(\tilde{x}_j)_{\lambda_k}(0,0)&=\delta_{j,k}\quad(1\le k\le n-1),\\(\tilde{x}_n)_{\lambda_k}(0,0)&=0,\\(\tilde{x}_n)_s(0,0)&=\widetilde{F}_{\tilde{v}_n}(\tilde{p}^0,\tilde{z}^0,\tilde{x}^0).\end{aligned}$$

Tenemos

$$J_{\tilde{x}}(0,0)=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&\widetilde{F}_{\tilde{v}_1}\\0&1&\cdots&0&\widetilde{F}_{\tilde{v}_2}\\\cdots&&&\cdots&\\0&0&\cdots&1&\widetilde{F}_{\tilde{v}_{n-1}}\\0&0&\cdots&0&\widetilde{F}_{\tilde{v}_n}\end{pmatrix}$$

luego $\det J_{\tilde{x}}(0,0)=\widetilde{F}_{\tilde{v}_n}\neq 0$. Por el teorema de la función implícita, $\tilde{x}$ es invertible. Falta mostrar

$$x(s,y(\lambda))=\psi(\tilde{x}(s,\lambda)).$$

Definir $\alpha(s,\lambda)=\psi(\tilde{x}(s,\lambda)$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Luego

$$(\alpha_i)_s=\sum_{j=1}^n(\psi_i)_{\tilde{x}_j}\,(\tilde{x}_j)_s=\sum_{j=1}^n(\psi_i)_{\tilde{x}_j}\,\nabla_{\tilde{v}_j}\widetilde{F}=F_{v_i}=(x_i)_s$$

(usando las ecuaciones características). Los valores iniciales son

$$\begin{aligned}\alpha_i(0,\lambda)&=\psi(\tilde{x}(0,\lambda))=y_i(\lambda),\\x_i(0,\lambda)&=y_i(\lambda).\end{aligned}$$

Luego α coincide con x, que termina la demostraciones.

8.14. Lo anterior permite dar la solución del BVP.
Teorema. Supóngase que (p^0,z^0,x^0) satisface la condición no-característica para el problema de Cauchy. La fórmula $u(x)=z(\phi(x))\quad(x\in\Omega)$ que define u a lo largo de las características con valores iniciales $u(y)=g(y)$ para $y\in\Gamma$, es solución del BVP.

Demostración. Por construcción u satisface los valores de frontera. Falta ver que satisface la PDE. La condición de compatibilidad de

F se traduce en la condición de compatibilidad de $\widetilde{F}$. Se tiene para todo $\lambda \in \Lambda$. Junto con las derivadas $(\tilde{x}_j)_{\lambda_k}(0,0)$ esto nos dice

$$\begin{aligned}\tilde{z}(s_0,\lambda) = \tilde{g}_{\lambda_k}(\lambda) = \tilde{p}_k(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i(s_0,\lambda)\,\delta_{i,k} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i(s_0,\lambda)\,(\tilde{x}_i)_{\lambda_k} \quad (1 \leq k \leq n-1).\end{aligned}$$

Ésta es la hipótesis del teorema que dice que las ecuaciones características dan una solución a la PDE (aplicado a $\widetilde{F}$ en lugar de F). La condición $F(p^0(\lambda),\ z^0(\lambda),\ x^0(\lambda)) = 0$ es trivial. Por el teorema, $\tilde{u}$ satisface $\widetilde{F}(\nabla\tilde{u}(x), \tilde{u}(\tilde{x}), \tilde{x}) = 0$, luego u satisface $F(\nabla u(x), u(x), x) = 0$.