PDES DE 1ER ORDEN $\#6$

ECUACIONES CUASILINEALES

6.1. Consideramos $\langle a(u(x),x), \nabla u(x)\rangle + b(u(x),x) = f(x)$ con b, f no necesariamente 0. Función definidora:

$$F(v,u,x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(u,x)\,v_i + b(u,x) - f(x)$$

tiene derivadas

$$\begin{aligned} F_{x_i} &= \sum_{j=1}^{n} (a_j)_{x_i}(u,x)\,v_j + b_{x_i}(u,x) - f_{x_i}(x), \\ F_u &= \sum_{i=1}^{n} (a_i)_u(u,x)\,v_i + b_u(u,x), \\ F_{v_i} &= a_i(u,x), \end{aligned}$$

y el sistema característico

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= a_i, \\ \frac{dz}{ds} &= \sum_{j=1}^{n} a_i\,p_i, \\ \frac{dp_i}{ds} &= -\left(\sum_{j=1}^{n} (a_j)_u\,p_j + b_u\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} (a_j)_{x_i}\,p_j + b_{x_i} - f_{x_i}\right) p_i, \end{aligned}$$

Igualando p_i con v_i, y $\sum_{i=1}^{n} a_i p_i$ con $f(x) - b(u,x)$,

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= a_i, \\ \frac{dz}{ds} &= f - b, \\ \frac{dp_i}{ds} &= -\left(\sum_{j=1}^{n} (a_j)_u\,v_j + b_u\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} (a_j)_{x_i}\,v_i + b_{x_i} - f_{x_i}\right) v_i. \end{aligned}$$

6.2. Ejemplo. $u_{x_1} + u_{x_2} = u^2$ $(\Omega = \{x\colon\ x_2 > 0\})$.
Coeficientes $a_1 = a_2 = 1$, $b = u^2$, $f = 0$, en lugar de ver

$$F_{x_1} = F_{x_2} = 0,\ F_u = -2u,\ F_{v_1} = F_{v_2} = 1.$$

se considera

$$(a_j)_{x_i} = (a_j)_u = 0,\ b_{x_i} = 0,\ b_u = 2u,\ f_{x_i} = f_u = 0.$$

el sistema característico es

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{ds} &= \frac{dx_2}{ds} = 1,\\
\frac{dz}{ds} &= p_1 + p_2 = v_1 + v_2 = u^2 = z^2,\\
\frac{dp_1}{ds} &= \frac{dp_2}{ds} = -2u = -2z.
\end{aligned}$$

Resolviendo: $x_1(s) = s + c_1$, $x_2(s) = s + c_2$. Luego $x_1 - x_2$ es constante en la curvas características $x(s) = (c_1, c_2) + (s, s)$. Además

$$z(s) = \frac{-1}{s + c_3}$$

for a constant c_3, con una constante para cada curva característica. Luego

$$u(x) = \frac{-1}{x_1 + w(x_1 - x_2)},$$

Verificación:

$$u_{x_1} = \frac{w'(x_1 - x_2) + 1}{(x_1 + w(x_1 - x_2))^2},\ u_{x_2} = \frac{-w'(x_1 - x_2)}{(x_1 + w(x_1 - x_2))^2}.$$

(Se podría haber escrito $u(x) = -1/(x_2 + w(x_1 - x_2)$ o $u(x) = 2/(x_1 + x_2 + w(x_1 - x_2))$.)

6.3. Se puede escribir las primeras ecuaciones características como $dx_i = a_i\, ds$, luego

$$\frac{dx_i}{a_i} = \frac{dx_j}{a_j} \quad (= ds).$$

Además $du = \sum_i u_{x_i}\, dx_i = \sum_i u_{x_i} a_i\, ds = (f - b)ds$, luego

$$\frac{du}{f - b} = \frac{dx_i}{a_i}.$$

Esta forma de frasear las ecuaciones presupone que las x_i son funciones una de la otra.

6.4. Ejemplo. $2x_2^4 u_{x_1} - x_1 x_2 u_{x_2} = x_1\sqrt{u^2+1}$. Tenemos

$$\frac{dx_1}{2x_2^4} = \frac{dx_2}{-x_1x_2} = \frac{du}{x_1\sqrt{u^2+1}}.$$

De la primera igualdad,

$$-x_1dx_1 = 2x_2^3dx_2, \quad -\frac{x_1^2}{2} = \frac{x_2^4}{2} - \frac{c_1^2}{2}, \qquad c_2 = x_1^2 + x_2^4,$$

De la segunda ecuación

$$\begin{aligned} -\frac{dx_2}{x_2} &= \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}, \\ -\log|x_2| &= \log(u+\sqrt{u^2+1}) + \log c_2 \\ x_2(u+\sqrt{u^2+1}) &= c_2. \end{aligned}$$

La integral general es, en forma implícita,

$$\phi\big(x_1^2 + x_2^4, x_2(u+\sqrt{u^2+1})\big) = 0.$$

6.5. Ejemplo. $x_1^2 u u_{x_1} + x_2^2 u u_{x_2} = x_1 + x_2$. Da

$$\frac{dx_1}{x_1^2u} = \frac{dx_2}{x_2^2u} = \frac{du}{x_1+x_2}.$$

Entonces

$$\frac{dx_1}{x_1^2} = \frac{dx_2}{x_2^2}, \quad \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = c_1, \quad x_1 = \frac{x_2}{1-c_1x_2}.$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{x_2^2u} &= \frac{du}{x_1+x_2}, \quad \frac{x_1+x_2}{x_2^2}\,dx_2 = udu \\ \frac{2-c_1x_2}{x_2(1-c_1x_2)}\,dx_2 &= \int udu + c_2 \\ \log\frac{x_2^4}{x_1^2} - u^2 &= c_2, \end{aligned}$$

La integral general es, en forma implícita,

$$\phi\Big(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1},\ \log\frac{x_2^4}{x_1^2} - u^2\Big) = 0.$$

PDES DE 1ER ORDEN $\#7$

ECUACIONES TOTALMENTE NO-LINEALES

7.1. Dada $F(v,u,x)$. Fijemos un punto $x^0 \in \Omega$ y $u^0 \in \mathbb{R}$. Definimos $\phi(v) = F(v,u^0,x^0)$. Si u es solución de la PDE, los posibles valores de ∇u en x^0 son soluciones de

$$\phi(v) = 0.$$

Entonces $\phi_v = F_v \neq 0$. Esto da $n-1$ grados de libertad, pensamos en v_i como funciones de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$,

$$v_i = V_i(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n-1}) \quad (1 \leq i \leq n),$$

con

$$\phi(V_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}),\ \ldots,\ V_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})) = 0.$$

El vector unitario normal a $\operatorname{Gr} u$ en (x^0,u^0) apunta en la dirección $(v,-1)$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ donde $v = \nabla u(x^0)$. El hiperplano tangente a $\operatorname{Gr} u$ es

$$S = (v,-1)^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

generado por n vectores

$$(1,0,0,\ldots,0,v_1),\ (0,1,0,\ldots,0,v_2),\ \ldots,\ (0,0,\ldots,0,1,v_n),$$

luego

$$S = \{(c_1,\ c_2,\ \ldots, c_n,\ \sum_{i=1}^{n} c_i\, v_i):\ \ c_i \in \mathbb{R}\}.$$

La condición $\phi(v) = 0$ limita los posibles hiperplanos. Los elementos $y = (y_1,\ldots,y_n,y_{n+1})$ de S se dan por la ecuación lineal $y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} v_i$, o sea

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} V_i(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})\, y_i.$$

Tomar ∂/∂_j:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial \lambda_j}\, y_i, \quad (1 \leq j \leq n-1).$$

luego

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_1}{\partial \lambda_1} & \dfrac{\partial V_2}{\partial \lambda_1} & \cdots & \dfrac{\partial V_n}{\partial \lambda_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial \lambda_{n-1}} & \dfrac{\partial V_2}{\partial \lambda_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial V_n}{\partial \lambda_{n-1}} \\ V_1 & V_1 & \cdots & V_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Sea $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz. Si es invertible,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A(\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = y_{n+1}\, A(\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = y_{n+1} W(\lambda),$$

donde

$$W(\lambda) = A(\lambda)^{-1} \delta_{n+1}.$$

Entonces los posibles elementos de S son

$$y = (y_{n+1} W(\lambda),\ y_{n+1}) = y_{n+1}(W(\lambda),\ 1)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$, and $y_{n+1} \in \mathbb{R}$.

7.2. $n = 2$:

$$\begin{aligned} V_1'(\lambda_1)\, y_1 + V_2'(\lambda_1)\, y_2 &= 0, \\ V_1 \lambda_1)\, y_1 + V_2(\lambda_1)\, y_2 &= y_3. \end{aligned}$$

luego

$$y_1 = \frac{V_2'}{V_2' V_1 - V_1' V_2} y_3, \quad y_2 = \frac{-V_1'}{V_2' V_1 - V_1' V_2} y_3,$$

o sea

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{V_2' V_1 - V_1' V_2} \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \end{pmatrix} y_3.$$

lo cual confirma la ortogonalidad

$$\left(\frac{V_2'}{V_2' V_1 - V_1' V_2},\ \frac{-V_1'}{V_2' V_1 - V_1' V_2},\ 1 \right) \perp \big(V_1,\ V_2,\ -1\big).$$

7.3. Definición. $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$: to points of E:

$$\text{cono}(E) = \{rx\colon\ x \in E,\ r \in \mathbb{R}\}.$$

(unión de rectas que son los generadores de cono(E))
Un cono sobre un punto es una recta (cono degenerado).

Definición. El *cono de Monge* de la PDE $F(\nabla u, u, x) = 0$ en $(x^0, u^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ es cono(E), con

$$E = \big\{(W(\lambda),\ 1)\colon\ \lambda \in \mathbb{R}^{n+1}\big\},$$

7.4. Proposición. Los conos de Monge de PDEs cuasilineales son degenerados.

Esto confirma la idea que las curvas características de PDEs cuasilineales son curvas integrales de un campo vectorial.

7.5. Ejemplo. $u_{x_1} u_{x_2} = \dfrac{1}{2}$.

7.6. Ejemplo. $u^2\big(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + 1\big) = 1$