PDES DE 1ER ORDEN $\#5$

Sistema Característico

5.1. Consideremos una curva $(x(s), z(s))$ en $\mathrm{Gr}(u) \subseteq \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sobre una curva $x(s) = (x_1(s), \ldots, x_n(s)) \in \Omega$ $(s \in I)$, con

$$z(s) = u(x(s)) \quad (s \in I),$$

5.2. Para una PDE cuasilineal $\sum_{i=1}^{n} a_i(u(x), x)\, u_{x_i}(x) + b(u(x), x) = 0$, tenemos un campo vectorial (a, b):

$$(a, b)(x, x_{n+1}) = \big(a(x_{n+1}, x),\ b(x_{n+1}, x)\big) \quad (x \in \Omega,\ x_{n+1} \in \mathbb{R}).$$

<u>Proposición.</u> u es solución de la PDE cuasilineal si y sólo si $\mathrm{Gr}\, u$ es una superficie integral de (a, b).

$\mathrm{Gr}\, u$ es unión de curvas integrales de (a, b).

5.3. Sea $p(s) = \nabla u(x(s))$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$,

<u>Teorema.</u> Sea u solución de $F(u, v, x) = 0)$. Sea $x \colon I \to \Omega$ de clase C^1. Supóngase que

$$\frac{dx_i}{ds} = F_{v_i} \quad (1 \leq i \leq n).$$

O sea, $dx_i(s)/ds = F_{v_i}(\nabla u(x(s)),\ u(x(s),\ x(s))$ $(x \in I)$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \sum_{i=1}^{n} F_{v_i}\, p_i, \\ \frac{dp_i}{ds} &= -F_u\, p_i - F_{x_i} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (s \in I). \end{aligned}$$

El <u>sistema característico</u> de la PDE,

$$x_s = \nabla_v F, \quad z_s = \langle \nabla_v F,\ p \rangle, \quad p_s = -F_u\, p - \nabla_x F.$$

$x(s)$ es curva característica base, $(x(s), z(s)$ es curva característica.

Por los resultados de sistemas de ODEs, existe una solución con datos iniciales prescritos.

5.4. Ejemplo. Sistema característico de

$$u_{x_1}^3 - (x_1+1)^2 u_{x_2} = x_1 x_2 u + x_1 - 2x_2.$$

Aquí

$$F(v_1, v_2, u, x_1, x_1) = v_1^3 - (x_1+1)^2 v_2 - x_1 x_2 u - x_1 + 2x_2$$

con

$$\begin{aligned} F_{v_1} &= 3v_1^2, \quad F_{v_2} = -(x_1+1)^2, \\ F_u &= -x_1 x_2, \\ F_{x_1} &= -2(x_1+1)v_1 - x_2 u - 1, \quad F_{x_2} = -x_1 u + 2. \end{aligned}$$

El sistema característico es

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= 3p_1^2, \quad \frac{dx_2}{ds} = -(x_1+1)^2, \\ \frac{dz}{ds} &= 3p_1^3 - (x_1+1)^2 p_2, \\ \frac{dp_1}{ds} &= x_1 x_2\, p_1 + 2(x_1+1)p_1 + (x_2 z + 1), \quad \frac{dp_2}{ds} = x_1 x_2\, p_2 + (x_1 z - 2). \end{aligned}$$

5.5. Ejemplo. $\cos(u_{x_1} - x_2) + \sin(u_{x_2} - x_1) = 0$,
$F(v_1, v_2, u, x_1, x_2) = \cos(v_1 - x_2) + \sin(v_2 - x_1)$.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= -\sin(p_1 - x_2), \quad \frac{dx_2}{ds} = \cos(p_2 - x_1), \\ \frac{dz}{ds} &= -(\sin(p_1 - x_2))\, p_1 + (\cos(p_2 - x_1))\, p_2, \\ \frac{dp_1}{ds} &= \cos(p_2 - x_1), \quad \frac{dp_2}{ds} = -\sin(p_1 - x_2). \end{aligned}$$

5.6. Ejemplo. PDE dependiente del tiempo: $u_t = t x_2^2 u_{x_1} - x_1^2 u_{x_2}$. En lugar de $x(s)$ es $(x_1(s),\ x_2(s),\ t(s))$.
$F(v_1, v_2, v_t, u, x_1, x_2, t) = v_t - t\, x_2^2\, v_1 + x_1^2\, v_2$.

$$\begin{aligned} F_{v_1} &= -t x_2^2, \quad F_{v_2} = x_1^2, \quad F_{v_t} = 1, \\ F_u &= 0 \\ F_{x_1} &= 2x_1 v_2, \quad F_{x_2} = -2t x_2 v_1, \quad F_t = -x_2^2 v_1. \end{aligned}$$

El sistema característico es

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{ds} = -tx_2^2, \quad \frac{dx_2}{ds} = x_1^2, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \\
&\frac{dz}{ds} = -tx_2^2\, p_1 + x_1^2\, p_2 + t\, p_t, \\
&\frac{dp_1}{ds} = -2x_1 p_2, \quad \frac{dp_2}{ds} = 2tx_2\, p_1, \quad \frac{dp_t}{ds} = x_2^2\, p_1, \quad .
\end{aligned}$$

5.7. Teorema. Dado un difeomorfismo $\phi\colon \Omega \to I \times \Lambda$ ($\Lambda \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$), defínase $x\colon I \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ por $x(s,\lambda) = \phi^{-1}(s,\lambda)$. Supóngase que hay funciones $z\colon I \times \Lambda \to \mathbb{R}$, $p\colon I \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ tales que para cada $\lambda \in \Lambda$),, las funciones $x_i(\cdot,\lambda)$, $z(\cdot,\lambda)$, $p_i(\cdot,\lambda)$ satisfacen las ecuaciones características de la PDE F. Supóngase ademas que para algun $s_0 \in I$,

$$F(p^0(\lambda),\ z^0(\lambda),\ x^0(\lambda)) = 0,$$
$$z_{\lambda_k}(s_0,\lambda) = \sum_{i=1}^n p_i(s_0,\lambda)\,(x_i)_{\lambda_k}(s_0,\lambda),$$

para cada $\lambda \in \Lambda$, donde $x^0(\lambda) = x(s_0,\lambda)$, $z^0(\lambda) = z(s_0,\lambda)$, $p^0(\lambda) = p(s_0,\lambda)$. Entonces la función

$$u(x) = z(\phi(x)) \quad (x \in \Omega).$$

es soluctione de la PDE $F(v,u,x) = 0$.

5.8. PDEs lineales sencillas: Ejemplos con $b(x) = 0$ $f(x) = 0$, $F(v,u,x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) v_i$,

$$\langle a(x), \nabla u(x) \rangle = 0.$$

Así $F_{v_i} = a_i$, $\quad F_u = 0$, $F_{x_i} = \sum_{j=1}^n (a_i)_{x_j}\, v_i$. Sistema característico:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_i}{ds} = a_i(x(s)) \quad (1 \le i \le n), \\
&\frac{dz}{ds} = \sum_{i=1}^n a_i(x(s))\, p_i(s), \\
&\frac{dp_i}{ds} = -\left(\sum_{j=1}^n (a_i)_{x_j}(x(s)) \right) p_i(s) \quad (1 \le i \le n).
\end{aligned}$$

Para PDEs de esta forma, cada solución es constante a lo largo de cada curva característica.

5.9. Ejemplo. $x_2 u_{x_1} - x_1 u_{x_2} = 0$, tiene $a_1 = x_2$, $a_2 = -x_1$.

$$\frac{dx_1}{ds}(s) = x_2(s), \quad \frac{dx_2}{ds}(s) = -x_1(s),$$

Para resolver: multiplicar por $x_1(s)$ ó $x_2(s)$:

$$x_1 \frac{dx_1}{ds} = x_1 x_2 = -x_2 \frac{dx_2}{ds}.$$

Integrar:

$$\frac{x_1^2}{2} = -\frac{x_2^2}{2} + \frac{c^2}{2},$$

luego $x_1^2 + x_2^2 = c^2$. Las curvas características con curvas de nivel. Sea $x_1(s) > 0$, $x_2(s) > 0$. Luego $x_1 x_2 > 0$, luego $x_1\, dx_1/ds > 0$, $x_2\, dx_2/ds > 0$, luego $dx_1/ds > 0$, $dx_2/ds < 0$. Conclusión: las curvas características son circunferencias trazadas en el sentido horario. Como $z(s)$ is constant tenemos $u(x_1, x_2) = w(x_1^2 + x_2^2)$ con $w \in C^1$,

El tercer grupo de ecuaciones características:

$$\begin{aligned} (a_1)_{x_1} &= 0, \quad (a_1)_{x_2} = 1, \\ (a_2)_{x_1} &= -1, \quad (a_2)_{x_2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{ds} &= -(0p_1 + (-1)p_2) = p_2, \\ \frac{dp_2}{ds} &= -(1p_1 + 0p_2) = -p_1, \end{aligned}$$

luego $p_1^2 + p_2^2$ es constante.

5.10. Ejemplo. $x_1 u_{x_1} - x_2 u_{x_2} = 0$, with $a_1 = x_1$, $a_2 = -x_2$, (**??**)–(**??**) are

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{ds}(s) = x_1(s), \ \frac{dx_2}{ds}(s) = -x_2(s), \\ &\frac{dz}{ds}(s) = 0, \\ &\frac{dp_1}{ds}(s) = -p_1(s), \quad \frac{dp_2}{ds}(s) = p_2(s). \end{aligned}$$

$x_1(s) = c_1 e^s$, $x_2(s) = c_2 e^{-s}$, $\therefore x_1 x_2 = c$ Como $z(s)$ es constante,

$$u(x_1, x_2) = w(x_1 x_2).$$

where w is a C^1-function.

5.11. Proposición. Supóngase que el sistema $x_i'(s) = a_i(x(s))$ es equivalente a $\phi(x_1,\ \ldots,\ x_n) = 0$ ($\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Sea $u(x) = w(\phi(x))$. Entonces u es solución de la PDE $\langle a, x\rangle + b = 0$.

5.12. ejem $(x_1 + 2x_2)u_{x_1} - x_2 u_{x_2} = 0$. Sistema característico:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= x_1 + 2x_2, \quad \frac{dx_2}{ds} = -x_2, \\ \frac{dz}{ds} &= 0, \\ \frac{dp_1}{ds} &= -p_1, \quad \frac{dp_2}{ds} = -2p_1 + p_2. \end{aligned}$$

Pensar en x_1 como función de x_2 a lo largo de una curva característica:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{1}{x_2} x_1 - 2.$$

Resolver la ODE por variación de parámetros:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{x_2}\Big(c - 2\int x_2 dx_2\Big) = \frac{c}{x_2} - x_2, \\ x_1 x_2 + x_2^2 &= c, \end{aligned}$$

La integral general es $u(x_1, x_2) = w(x_1 x_2 + x_2^2)$.

5.13. Ejemplo. $x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + x_3 u_{x_3} = 0$.

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{ds}(s) = x_1(s),\ \frac{dx_2}{ds}(s) = x_2(s),\ \frac{dx_3}{ds}(s) = x_3(s), \\ &\frac{dz}{ds}(s) = 0, \\ &\frac{dp_1}{ds}(s) = -p_1(s),\ \frac{dp_2}{ds}(s) = -p_2(s),\ \frac{dp_3}{ds}(s) = -p_3(s). \end{aligned}$$

De esto

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3}$$

a lo largo de las característics, luego

$$\frac{x_2}{x_1} = c_1, \ \frac{x_3}{x_1} = c_2,$$

y la integral general es

$$u(x_1, x_2, x_3) = w\Big(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\Big).$$

PDES DE 1ER ORDEN $\#6$

PDEs lineales

6.1. La PDE lineal general es

$$F(v, u, x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, v_i + b(x)\, u - f(x).$$

Todavía conviene ver unas clases especiales.

6.2. Ejemplo. $n = 2$:

$$a_1 u_{x_1}(x_1, x_2) + b\, u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2).$$

a_1, b constantes, $a_1 \neq 0$, $b \neq 0$. Para cada x_2 fijo es una ODE lineal en x_1, que se resuelve con un factor integrante: multiplicar

$$u_{x_1} + \frac{b}{a_1} u = \frac{1}{a_1} f$$

por $\mu(x_1) = e^{(b/a_1)x_1}$: $(\mu u)_{x_1} = \dfrac{1}{a_1} f\mu$, integrar con respecto a x_1 y dividir por μ:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{a_1} \int f(s, x_2)\, e^{(b/a_1)(s-x_1)}\, ds + w(x_2)\, e^{-(b/a_1)x_1}.$$

6.3. Ejemplo. Un poco más general:

$$a_1\, u_{x_1}(x_1, x_2) + a_2\, u_{x_2}(x_1, x_2) + b\, u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2),$$

con además $a_2 \neq 0$. Ya no es ODE. Introducir

$$\widetilde{x}_1 = a_2 x_1 - a_1 x_2, \quad \widetilde{x}_2 = x_2,$$

(invertible, con inversa $x_1 = (1/a_2)(\widetilde{x}_1 + a_1 \widetilde{x}_2)$, $x_2 = \widetilde{x}_2$). Definir

$$\widetilde{u}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = u(x_1, x_2).$$

Por la regla de la cadena

$$a_1 u_{x_1} + a_2 u_{x_2} = a_1 \, \widetilde{u}_{x_1}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) + a_2 \, \widetilde{u}_{x_2}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = a_2 \widetilde{u}_{\widetilde{x}_1},$$

o sea

$$a_2 \, \widetilde{u}_{\widetilde{x}_1} + b \, \widetilde{u} = w_1\Big(\frac{1}{a_2}(\widetilde{x}_1 + a_1 \widetilde{x}_2), \widetilde{x}_2\Big),$$

luego resolver como el ejemplo anterior.

6.4. Ahora la PDE lineal general $\langle a(x), \nabla u(x) \rangle + b(x) u(x) = f(x)$.

$$F(v_1, \ldots, v_n, u, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) v_i + b(x) u - f(x).$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
F_{v_i}(x) &= a_i(x), \\
F_u(x) &= b(x), \\
F_{x_i}(x) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i)_{x_j}(x) \, v_i + \sum_{j=1}^{n} b_{x_j}(x) \, u - f_{x_i}(x) \quad (1 \leq i \leq n),
\end{aligned}$$

y el sistema característico

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i}{ds} &= a_i, \\
\frac{dz}{ds} &= \sum_{i=1}^{n} a_i p_i, \\
\frac{dp_i}{ds} &= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i)_{x_j}(x) v_i - \sum_{j=1}^{n} b_{x_j}(x) u + f_{x_i}(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i p_i.
\end{aligned}$$

6.5. Trabajamos en $\mathbb{R}^{n+1}$ con una variable nueva $x_{n+1} = u$.
Supongamos que u está definida en forma implicíta por

$$\phi(x, u(x)) = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ u(x_1, \ldots, x_n)) = 0,$$

$x \in \Omega$, $\phi\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Necesitamos

$$\phi_{x_{n+1}}(x, x_{n+1}) \neq 0,$$

para que se defina u por el teorema de la función implícita (localmente).

Teorema. Dadas $a_1, \ldots, a_n, b, f$ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, póngase

$$a_{n+1}(x) = f(x) - b(x)u(x).$$

for $x \in \Omega$. Considerar a las a_i $(i \leq 1 \leq n)$ como funciones en $\Omega \times \mathbb{R}$ que no dependen de la última variable: $a_i(x, x_{n+1}) = a_i(x)$. Sea ϕ una solucion de la PDE

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i(x)\phi_{x_i}(x, x_{n+1}) = 0$$

en $\Omega \times \mathbb{R}$. Supóngase que $\phi_{x_{n+1}}(x, x_{n+1}) \neq 0$ y que u satisface $\phi(x, u(x)) = 0$. Entonces u es una solución de la PDE lineal l $\langle a(x), \nabla u(x)\rangle + b(x)u(x) = f(x)$.

Ya vimos cómo resolver la PDE del teorema.

Corolario. Las ecuaciones características para $x(s)$ y $z(s)$ son conjuntamente equivalentes a

$$\frac{dx_i}{ds}(s) = a_i(x(s)) \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\frac{dz}{ds}(s) = -b(x(s))z(s) + f(x(s)).$$

(Estas ecuaciones no contienen $p_i(s)$.)

6.6. Ejemplo. $x_2\, u_{x_1} + x_1\, u_{x_2} = x_1 - x_2$. Usamos el corolario,

$$\frac{dx_1}{ds} = x_2, \quad \frac{dx_2}{ds} = x_1,$$
$$\frac{dz}{ds} = x_1 - x_2.$$

de las dos primeras, $x_1^2 - x_2^2 = c_1$. La suma de las tres ecuaciones da

$$\frac{d}{ds}(z + x_1 - x_2) = \frac{dz}{ds} + \frac{dx_1}{ds} - \frac{dx_2}{ds} = 0,$$

luego $z+x_1-x_2=c_2$. Por lo tanto $u(x(s))+x_1(s)-x_2(s)$ es constante a lo largo de las curvas características. La solución es

$$w(x_1^2-x_2^2,\ u(x)+x_1-x_2)=0,$$