PDES DE 1ER ORDEN $\#4$

SOLUCIONES GENERALES

4.1. Una solución solution o integral general de una PDE lleva funciones arbitrarias. (Las integrales completas llevan un número finito de constantes.)

Sea $u(x,p)$ una solución parametrizada de $F(\nabla u, u, x) = 0$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in \Pi \subset \mathbb{R}^n$. Inventamos la idea que p_j dependen de x:

$$p_j = P_j(x_1, \ldots, x_n) \quad (1 \le j \le n).$$

Entonces

$$U(x) = u(x, P(x)) = u(x_1, \ldots, x_n, P_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, P_n(x_1, \ldots, x_n))$$

sólo depende de x. Por la regla de la cadena,

$$U_{x_i}(x) = \frac{\partial u(x, P(x))}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x, P(x))}{\partial p_j} \frac{\partial P_j(x)}{\partial x_i},$$

i.e., $U_{x_i} = u_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} u_{p_i} (P_j)_{x_i}$. Sería conveniente que $\sum_{j=1}^{n} u_{p_j} (P_j)_{x_i} = 0$, lo cual daría $U_{x_i} = u_{x_i}$ y luego

$$F(\nabla U(x), U(x), x) = F(\nabla u(x, P(x)), u(x, P(x)), x) = 0.$$

En forma matricial, con $J_P(x) = (\partial P_j / \partial x_i)_{i,j}$, queremos

$$(J_P)^T \, \nabla_p u = 0.$$

Suponiendo que se puede escribir $P_n = w(P_1, \ldots, P_{n-1})$, luego

$$\frac{\partial P_n(x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial w}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial x_i} \quad (1 \le i \le n).$$

De esto $\det J_P = 0$ (la última columna es combinación de las anteriores).

Volviendo a $\sum_{j=1}^{n} u_{p_i}(P_j)_{x_i} = 0$, apartiendo el término de $j = n$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} u_{p_j}\,(P_j)_{x_1} + u_{p_n} \sum_{j=1}^{n-1} w_{p_j}\,(P_j)_{x_1} = 0,$$

o sea

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(u_{p_j} + u_{p_n} w_{p_j}\right)(P_j)_{x_i} = 0.$$

Una condición suficiente para esto es

$$u_{p_j}(x, P(x)) + u_{p_n}(x, P(x))\, w_{p_j}(P(x)) = 0 \quad (1 \le j \le n-1).$$

Tomando $u(x,p)$ y asi $\{u_{p_j}\}$ y además w como datos conocidos, y eliminando $P_n(x)$ en cada $P(x)$, tenemos un sistema de $n-1$ ecuaciones no-lineales en las incógnitas $P_1(x), \ldots, P_{n-1}(x)$. Si es que se puede resolver (quizás no de forma única), tenemos las funciones

$$P_j(x) = G_j[w](\nabla u(x), x) \quad (1 \le j \le n-1)$$

La solución general es

$$u(x, P_1(x), \ldots, P_{n-1}(x), w(P_1(x), \ldots, P_{n-1}(x))$$

para w arbitraria.

(También puede hacerse cuando u o w se dan en forma implícita.)

4.2. Ejemplo. $u_{x_1} u_{x_2} = u$. Se verifica que $u(x,p) = (x_1 - p_1)(x_2 - p_2)$ es integral completa. Necesitamos una función arbitraria $p_2 = w(p_1)$, por ejemplo

$$w(p_1) = cp_1$$

con $c \neq 0$. Como $n = 2$, hay sólo una ecuación de las p_j, con $j = 1$:

$$u_{p_1}(x,p) + u_{p_2}(x,p) w_{p_1} = -(x_2 - p_2) + (-(x_1 - p_1))c = 0.$$

El último parámetro es $p_2 = cp_1$, que da $-x_2 + cp_1 - c_{x_1} + cp_1 = 0$, luego

$$p_1 = \frac{cx_1 + x_2}{2c}$$

que será la definición de $P_1(x_1, x_2)$. Nos da la solución

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \frac{cx_1 + x_2}{2c}, \frac{cx_1 + x_2}{2}) &= \big(x_1 - \frac{cx_1 + x_2}{2c}\big)\big(x_2 - \frac{cx_1 + x_2}{2}\big)) \\ &= \frac{-1}{4c}(cx_1 - x_2)^2. \end{aligned}$$

4.3. Sea $S(\lambda) \subseteq \mathbb{R}^n$ una familia de hipersuperficies con un parámetro $\lambda \in I$. Por ejemplo, $S(\lambda) = \{x\colon\ G(x,\ \lambda) = 0\}$, $(x \in \Omega,\ \lambda \in I)$, G de clase C^1 con $\partial G(x, \lambda)/\partial\lambda \neq 0$. Así $S(\lambda)$ es de dimensión $(n-1)$.

Para $\lambda \neq \lambda^*$, por lo general $S(\lambda) \cap S(\lambda^*)$ será de dimensión $(n-2)$:

$$G(x,\ \lambda) = 0, \quad G(x,\ \lambda^*) = 0.$$

Luego $(G(x,\ \lambda^*) - G(x,\ \lambda))/(\lambda^* - \lambda) = 0$, y en el límite $\lambda^* \to \lambda$,

$$G(x,\ \lambda) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\lambda}G(x,\ \lambda) = 0.$$

El conjunto de soluciones $\breve{S}(\lambda)$ es de dimensión $(n-2)$ y está contenido en $S(\lambda)$. Es el caso límite de $S(\lambda) \cap S(\lambda^*)$. Cada vector tangente a $\breve{S}(\lambda)$ es tangente a $S(\lambda)$.

<u>Definición.</u> La <u>envoltura</u> de $\{S(\lambda)\}$ es la unión

$$\operatorname{env}\{S(\lambda)\}_{\lambda \in I} = \bigcup_{\lambda \in I} \breve{S}(\lambda).$$

4.4. Sea $u = u(x, p) \in C^1(\Omega \times \Pi)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$. Supóngase que podemos resolver

$$\nabla_p u(x, p) = 0 \quad (x \in \Omega,\ p \in \Pi),$$

para p como una función C^1 de x: $p = p(x)$, o sea $p\colon \Omega \to \Pi$,

$$\nabla_p u(x, p(x)) = 0$$

<u>Definición.</u> La función $v(x) = u(x, p(x))$ es la <u>envoltura</u> de la familia $u(x, p)$.

4.5. <u>Proposición.</u> Sea v la envoltura de $u \in C^1(\Omega \times \Pi)$. Entonces $v \in C^1(\Omega)$, y para cada $x \in \Omega$, las gráficas de v y de $u(\cdot, p(x))$ son tangentes en el punto $(x, p(x))$

4.6. Ejemplo. $u(x,p) = (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + p_1 + p_2$. Como

$$u_{p_i}(x,p) = -2(x_i - p_i) + 1,\ i = 1,2$$

Luego $\nabla_p u(x,p) = 0 \iff p_i = \frac{2x_i - 1}{2}$. Se define

$$\begin{aligned} v(x) &= \left(x_1 - \frac{2x_1 - 1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{2x_2 - 1}{2}\right)^2 + \frac{2x_1 - 1}{2} + \frac{2x_2 - 1}{2} \\ &= x_1 + x_2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

que es la envoltura.

4.7. $u(x,p) = (x_1 - p_1)^4 + x_2^2 - p_1 - p_2 - p_3$. El gradiente es

$$u_{p_1}(x,p) = -4(x_1 - p_1)^3 - 1,\ u_{p_2}(x,p) = -1,\ u_{p_3}(x,p) = -1,$$

que nunca es $(0,0,0)$. La familia no tiene envoltura.

4.8. Ejemplo. $u(x,p) = (x_1 - p_1)^6 + x_2 + x_3 - p_1 - 2p_2^2 - 2p_3^2$

4.9. Ejemplo. $u(x,p) = x_1^2 + 2(x_1 - p_1) + x_2 + p_2 + x_3 + p_3 + x_4 + p_4$.

4.10. Ejemplo. $(x_1 - c)^2 + (x_2 - c)^2 = 1$ (Círculos centrados en (c,c). Deberíamos escribir $x_2 = u(x_1)$, $c = p_1$: Realmente $n = 1$: $(x_1 - p_1)^2 + (u(x_1, p_1) - p_1)^2 = 1$. La familia parametrizada es

$$u(x, p_1) = p_1 \pm \sqrt{1 - (x_1 - p_1)^2},$$

luego el gradiente es

$$u_{p_1} = 1 \pm \frac{x_1 - p_1}{\sqrt{1 - (x_1 - p_1)^2}}.$$

que es cero cuando $x_1 - p_1 = \sqrt{1 - (x_1 - p_1)^2}$. Luego

$$p_1 = x_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La envoltura es

$$v(x_1) = (x_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = x_1 \pm \sqrt{2}.$$

La gráfica $x_2 = v(x_1)$ da las rectas tangentes de la familia. La envoltura también se escribe como $(x_2 - x_1)^2 = 2$.

4.11. El ejemplo anterior puede resolverse por diferenciación implicita:

$$\begin{aligned} &-2(x_1 - p_1) + 2(u - p_1)(u_{p_1} - 1) = 0, \\ &u_{p_1} = 1 - \frac{x_1 - p_1}{u - p_1}. \end{aligned}$$

Con $u_{p_1} = 0$ obtenemos $u = x_1$, luego $(x_1 - p_1)^2 + (x_1 - p_1)^2 = 1$, etc.

4.12. <u>Ejemplo.</u> $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$ sujeto a la condición $a^2 + b^2 = 1$.

4.13. $u(x, p)$ familia parametrizada de soluciones de $F(\nabla u, u, x) = 0$, $p \in \Pi$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Supongamos que la envoltura $v(x)$ existe.
<u>Definición.</u> La envoltura de $u(x, p)$ es una <u>integral singular</u> de la PDE.

(Siempre es C^1 porque por hipótesis $p(x)$ es C^1.)

<u>Teorema.</u> Cada integral singular es solución de la PDE.

4.14. <u>Ejemplo.</u> Vimos que $u(x, p) = \frac{1}{2}(x_1 + p_1)^2 + \frac{4}{27}(x_2 + p_2)^3$ es solución parametrizada de $((u_{x_1})^2 - 2u)^2 = (u_{x_2})^3$. Encontremos la envoltura.

$$\nabla_p u(x, p) = \Big(x_1 + p_1,\ \frac{4}{9}(x_2 + p_2)^2\Big).$$

Entonces $\nabla_p u(x, p) = 0$ si y sólo si $p_1 = -x_1,\ p_2 = -x_2$ La envoltura es $v(x) = u(x, p(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Por el Teorema, es solución de la PDE.

4.15. <u>Ejemplo.</u> Vimos que $u(x, p) = \dfrac{1}{4(1 + p_1^2)}\,(x_1 + p_1 x_2 + p_2)^2$ es solución parametrizada de $u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = u$. Encontremos la envoltura.

$$\begin{aligned} \nabla_p u(x, p) &= (u_{p_1}(x, p),\ u - p_2(x, p)) \\ &= \Big(\frac{x_1 + p_1 x_2 + p_2}{2(1 + p_1^2)}\Big(-\frac{p_1}{1 + p_1^2}\,(x_1 + p_1 x_2 + p_2) + 1\Big), \\ &\qquad \frac{p_1}{2(1 + p_1^2)}\,(x_1 + p_1 x_2 + p_2)\Big) \end{aligned}$$

Afirmamos $\nabla_p u(x, p) = 0 \iff x_1 + p_1 x_2 + p_2 = 0$. El "$\Leftarrow$" es obvio. De no ser cierto el "$\Rightarrow$", $\nabla_p u(x, p) = 0$ daría $p_1 = 0$, y luego la contradicción $x_1+p_1x_2+p_2=0$. La conclusión es $x_1+p_1x_2+p_2=0$. Ahora poner esto en $u(x,p)$ para obtener la envoltura $v(x)=0$, que es solución.

<u>Ejemplo.</u> Vimos que $u(x,p)=-\dfrac{3(p_1+1)^{1/3}}{4}\,(x_1)^{4/3}-p_1(x_2)^{-1}+p_2$ es integral completa de $(u_{x_1})^3+x_1(x_2)^2\,u_{x_2}+x_1=0$ en $\Omega=\{x\colon\ x_2\neq 0\}$). El cálculo mostró que $u_{p_2}(x,p)=1$ para todo x,p. No podemos resolver $\nabla_p u=0$, luego no hay envoltura.

Hay una subfamilia con $p_2=0$. Técnicamente en lugar de $\Omega\times\Pi$ tenemos $\Omega\times\breve{\Pi}$, $\breve{\Pi}=\mathbb{R}$,

$$\breve{u}(x_1,x_2,p_1)=u(x,p)=-\frac{3(p_1+1)^{1/3}}{4}\,(x_1)^{4/3}-p_1(x_2)^{-1}.$$

El p-gradiente es $\nabla_p\breve{u}=u_{p_1}$, que ya calculamos; $\nabla_{p_1}\breve{u}=0$ significa

$$p_1=-1\pm\frac{(-x_2)^{3/2}\,x_1^2}{8},$$

$$\begin{aligned}\breve{v}(x)&=-\frac{3}{4}\Big(\pm\frac{1}{2}(-x_2)^{1/2}x_1^{2/3}\Big)x_1^{4/3}-\frac{1}{x_2}\Big(-1+\pm\frac{1}{8}(-x_2)^{3/2}x_1^2\Big)\\&=\pm\frac{1}{4}(-x_2)^{1/2}x_1^2+\frac{1}{x_2}\quad(x_2<0).\end{aligned}$$