PDES DE 1ER ORDEN $\#3$

SOLUCIONES COMPLETAS

3.1. Definición. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Pi \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \leq n$. Una solución parametrizada de $F(\nabla u, u, x) = 0$ con parámetros en Π es una función $u \in C^2(\Omega \times \Pi)$ tal que para $p = (p_1, \ldots, p_m) \in \Pi$ fijo, la función $u(\cdot, p)$ es solución.

Podría definirse en forma implícita, $\Phi(u, x, p) = 0$ con $\Phi\colon \mathbb{R} \times \Omega \times \Pi$. Para $x \in \Omega$, $p \in \Pi$, $\Phi(u(x,p), x, p) = 0$.

3.2. Ejemplo. $((u_{x_1})^2 - 2u)^2 = (u_{x_2})^3$,

$$u(x,p) = \frac{1}{2}(x_1 + p_1)^2 + \frac{4}{27}(x_2 + p_2)^3 \quad ((x,p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$$

Ejemplo. $u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = u$,

$$u(x,p) = \frac{1}{4(1 + p_1^2)}\,(x_1 + p_1 x_2 + p_2)^2, \quad ((x,p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2),$$

3.3. Una parametrización no es muy buena si no es 1-a-1 (por lo menos localmente).

Definición. Sea $u(x,p)$ solución parametrizada de $F(\nabla u, u, x) = 0$. Se dice que $u(x,p)$ depende de menos de n parámetros cuando existe una solución parametrizada $v(x,q)$, $q \in \breve{\Pi} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, y una función $\psi\colon \Pi \to \breve{\Pi}$ de clase C^1 tales que

$$v(x, \psi(p)) = u(x,p) \quad (p \in \Pi).$$

Cuando no existen tales v, ψ, se dice que $u(x,p)$ depende de forma esencial de n parámetros.

3.4. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $u(x,p) \in C^2(\Omega \times \Pi)$ una solución parametrizada.

La <u>matriz $\nabla^2_{x,p}u$ de derivadas x- y p-mixtas</u> de $u(x,p)$ se forma de $u_{p_j x_i}$ $(1 \le j \le n,\ 1 \le i \le n)$:

$$\big(\nabla_p u(x,p), \nabla^2_{x,p} u(x,p)\big) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial p_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial p_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial p_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial u}{\partial p_2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial p_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial p_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial p_n} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial p_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial p_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

<u>Definición.</u> Una solución parametrizada $u(x,p)$ se dice una <u>integral completa</u> de la PDE cuando rango$\big(\nabla_p u, \nabla^2_{x,p} u\big) = n$ para cada $x \in \Omega$, $p \in \Pi$.

3.5. <u>Teorema.</u> Sea $u(x,p)$ una integral completa de $F(\nabla u, u, x) = 0$ en $\Omega \times \Pi$. Entonces $u(x,p)$ depende de forma esencial de los n parámetros $p_1, \ldots, p_n$.

3.6. <u>Ejemplo.</u> $u = u(x,p) = p_1 x_1 + p_2 x_2$ es integral completa de

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = u.$$

<u>Ejemplo.</u> $u(x,p) = \langle x, p \rangle + f(p)$ es integral completa de la ecuación de Clairaut $\langle x, \nabla u \rangle + f(\nabla u) = u$ $(\Omega = \mathbb{R}^n = \Pi)$.

<u>Ejemplo.</u> $u(x,t,p,q) = \langle p, x \rangle + q - tf(p)$ es integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi $\dfrac{\partial u}{\partial t} + f(\nabla u) = 0$.

3.7. <u>Ejemplo.</u> $\big(u_{x_1}\big)^2 + \big(u_{x_2}\big)^2 = 1$. Cuando $p_1^2 + p_2^2 = 1$, la función

$$u(x,p) = u(x_1, x_2, p_1, p_2, p_3) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3$$

es solución. Pero no es familia parametrizada buena por que p_1, p_2 no son independientes: $u(x,p) = p_1 x_1 + (1 - (p_1)^2)^{1/2} x_2 + p_2$, o mejor

$$u(x,p) = u(x_1, x_2, p_1, p_2) = (\cos p_1) x_1 + (\sin p_1) x_2 + p_2. =,$$

que es integral completa.

3.8. Ejemplo. Solución mediante cambio de variable.

$$x_1^2 u_{x_1}^2 + x_2^2 u_{x_2}^2 = u^2$$

en $\Omega = \{x\colon\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$. Se reescribe.

$$\Big(\frac{x_1}{u}\,u_{x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{x_2}{u}\,u_{x_2}\Big)^2 = 1.$$

Definimos

$$\begin{aligned} X_i &= \log x_i\ (i = 1, 2), \\ U(X_1, X_2) &= \log u(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{dX_i}{dx_i} = \frac{1}{x_i}, \quad \frac{dU}{dX_i} = \frac{d}{dX_i} \log u(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{u} u_{x_i}\right) x_i$$

Luego $dx_i/dX_i = x_i$,

$$\left(\frac{dU}{dX_1}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dX_2}\right)^2 = 1 \text{ on } \Omega.$$

Por un ejemplo anterior, conocemos una integral completa

$$U(X_1, X_2, p_1, p_2) = (\cos p_1) X_1 + (\sin p_1) X_2 + p_2.$$

Entonces $\log u = (\cos p_1) \log x_1 + (\sin p_1) \log x_2 + p_2$,

$$u(x_1, x_2, p_1, p_2) = e^{p_2} x_1^{\cos p_1} x_2^{\sin p_1}.$$

Pongamos $c = \cos p_1,\ s = \sin p_1$,

$$\begin{aligned} \nabla_p u &= (e^{p_2}(-s \log x_1 + c \log x_2) x_1^c x_2^s,\ e^{p_2} x_1^c x_2^s), \\ \nabla_x u &= \big(c e^{p_2} x_1^{c-1} x_2^s,\ s e^{p_2} x_1^c x_2^{s-1}\big). \end{aligned}$$

Como $u(x) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{rango}(\nabla_p u, \nabla_{x,p}^2 u) &= \operatorname{rango} \begin{pmatrix} -s \log x_1 + c \log x_2 & \frac{c^2 \log x2 - cs \log x_1 - s}{x_1} & \frac{c}{x_1} \\ 1 & \frac{c}{x_1} & \frac{c}{x_1} \end{pmatrix} \\ &= 2. \end{aligned}$$

3.9. Una forma más sencilla de verificar el rango de la matriz de derivadas mixtas, cuando se cambia de variable.

Teorema. Sea $u(x,p)$ integral completa de $F(\nabla u, u, x) = 0$. Considérense nuevas variables $X_i = \varphi_i(x_i)$ con $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ funciones C^1. Sea $U(X,p) = f(u(x,p))$ con $X = (X_1, \dots, X_n)$, con f una función C^1 invertible. Supóngase que la PDE se transforma en

$$G(\nabla U, U, X) = 0.$$

Entonces $U(X,p)$ es integral completa de $G(\nabla U, U, X) = 0$.

3.10. Ejemplo. PDE $x_1 u_{x_1}^2 + x_2 u_{x_2}^2 = u^3$ (en$\Omega = \{x \colon x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$. Se reescribe como

$$\left(\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{u^3}}\, u_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{u^3}}\, u_{x_2}\right)^2 = 1.$$

Poner

$$X_i = 2x_i^{1/2}\ (i - 1, 2), \quad U = -2u^{-1/2},$$

lo cual da

$$\frac{dX_i}{dx_i} = \frac{1}{\sqrt{x_i}}, \quad \frac{dU}{du} = \frac{1}{\sqrt{u^3}},$$

y la PDE se convierte en

$$\left(\frac{dU}{dX_1}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dX_2}\right)^2 = 1.$$

Sabemos de la integral completa

$$U(X_1, X_2, p_1, p_2) = (\cos p_1) X_1 + (\sin p_1) X_2 + p_2,$$

luego

$$u = \left(\frac{-2}{U}\right)^2 = \frac{4}{(2(\cos p_1) x_1^{1/2} + 2(\sin p_1) x_2^{1/2} + p_2)^2}.$$

por el Teorema, $u(x_1, x_2, p_1, p_2)$ es integral completa.