PDES DE 1ER ORDEN $\#2$

Definición de PDE

2.1. Una función definidora para una PDE es

$$F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$$
$$F(v, u, x) = F(v_1,\ \ldots,\ v_n,\ u,\ x_1,\ \ldots,\ x_n).$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definición. La PDE asociada a F es

$$F(\nabla u(x), u(x), x) = 0.$$

y una solución es una función $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que esto se tiene para cada $x \in \Omega$.

Supondremos que F es de clase C^1 y también $\nabla_v F \neq 0$, that is,

$$(F_{v_1},\ F_{v_2},\ \ldots,\ F_{v_n}) \neq (0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

para cada $(v, u, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega$.

2.2. Ejemplo. $\quad x_2 u_{x_1}(x) - x_1 u_{x_2}(x) = 0, \quad \Omega = \mathbb{R}^2.$

Función definidora:

$$F(v_1, v_2, u, x_1, x_2) = x_2 v_1 - x_1 v_2.$$

Sea $w \in C^1(\mathbb{R})$, y $u(x) = w(x_1^2 + x_2^2) \quad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2)$.

2.3. Ejemplo. Ecuacion de Clairaut: $\langle x, \nabla u\rangle + f(\nabla u) = u$, con $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sea

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i + f(1, \ldots, 1).$$

Ejemplo. Ecuación eikonal: $|\nabla u| = 1$.
Sea $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| = 1$. Sea $u(x) = \langle a, x\rangle$.

2.4. No se puede siempre tomar $\Omega = \mathbb{R}^n$. La función $u(x) = x_1^2 + x_2^2$ es solución de $x_2 u_{x_1}(x) - x_1 u_{x_2}(x) = 0$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, pero $u(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ es solución sólo en $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

2.5. Definición. $F(u, v, x) = 0$ es lineal cuando

$$F(v, u, x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) v_i + b(x) u - f(x).$$

o sea

$$F(\nabla u, u, x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + b(x) u - f(x).$$

Así

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i}(x) + b(x)\, u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega).$$

Cuando el término no-homogéneo f es idénticamente cero, la PDE es homogénea. Cuando $a_i(x)$ and $b(x)$ son constantes, es la PDE es "de coeficientes constantes".

2.6. Un PDE nolineal es semilineal cuando

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + b(u, x) = f(x),$$

o sea $a\colon \Omega \to \mathbb{R}$ and $b\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es cuasilineal cuando

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(u, x) u_{x_i} + b(u, x) = f(x),$$

lineal $\subset$ estrictamente semilineal $\subset$ estrictamente cuasilineal $\subset$ totalmente nolineal.

2.7. ¿homogénea o no homogénea?

1. $x_1 u_{x_1} - u_{x_2} = 0$,

2. $u_{x_1} - 2u_{x_2} + 3u_{x_3} = x_1 + x_2$,
3. $(x_1^2 + x_2^2 + 1)u_{x_1} - x_3 u_{x_2} + u_{x_3} = 1$,
4. $u_{x_1} - u_{x_2} + u_{x_3} + u_{x_4} = 0$,
5. $2u_{x_1} - 3u_{x_2} + x_3 u_{x_3} = x_1$.

2.8. ¿Lineal or no lineal?

1. $(u_{x_1})^2 + u_{x_2} + u_{x_3} = 0$,
2. $1/(1 + (u_{x_1})^2) + (u_{x_2})^2 - u_{x_3} = u^2 + x_2 + x_3$,
3. $u_{x_1} + 2x_1 u_{x_2} + 2x_2 u_{x_3} = u + \sin x_1$,
4. $-u_{x_1} u_{x_2} + u_{x_3} = u$,
5. $\sin(x_1 + 1)u_{x_2} - u_{x_1} = \cos x_2$.

2.9. ¿Cuasilineal or semilineal?

1. $x_1^4 u_{x_1} + u_{x_2} + u u_{x_3} = u^2 - 1$,
2. $x_1 u u_{x_1} + u u_{x_2} + u_{x_3} + 2x_2 u_{x_4} = \sqrt{1 + u^2}$,
3. $u_{x_1} + u_{x_2} + u_{x_3} = u^4$,
4. $(x_1 + 1)u_{x_1} + (x_1 x_2 x_3 - 1)u_{x_2} + x_2^3 u u_{x_3} = 0$,
5. $u_{x_1} - 2x_2^2 u_{x_2} = \sin u$.

2.10. <u>PDE dependiente del tiempo</u>. Función definidora $\mathbb{R} \times \Omega \times I \to \mathbb{R}$,

$$F(\nabla_x u(x,t),\, u_t(x,t),\, u(x),\, x,\, t) = 0.$$

o sea

$$F\big(\, u_{x_1}(x,t),\, \ldots,\, u_{x_n}(x,t),\, u_t(x,t),\, u(x,t),\, (x_1, \ldots, x_n),\, t \,\big) = 0.$$

2.11. Ejemplo. Ecuación de Hamilton-Jacobi: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + f(\nabla u) = 0$.
Sea $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$,

$$u(x,t) = \langle (1,\dots,1), x\rangle - tf(1,\dots,1)$$

2.12. Ejemplo. Ecuación del transporte: $u_t + \langle c, \nabla u\rangle = 0$, con $c = (c_1,\dots,c_n) \in \mathbb{R}^n$.
Sea $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(x_i - c_i t)$.

2.13. Ejemplo. Ecuación invíscida de Burger: $u_t + u\, u_{x_1} = 0$, $((x_1,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty))$.
Sea $w \in C^1(\mathbb{R})$, $w' > 0$.
Sea $u(x_1,t) = w(x_1 - tu(x_1,t))$