PDES DE 1ER ORDEN $\#1$

REPASO DE CÁLCULO

1.1. Espacio euclidiano

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1,\ \ldots,\ x_n)\colon\ x_j \in \mathbb{R}\ (1 \leq j \leq n)\}\,.$$

con producto escalar $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ y métrica $d(x,y) = \|x-y\|$ y la topología correspondiente.

1.2. Funciones lineales

$$T_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$T_A(x+y) = T_A(x) + T_A(y), \quad T_A(\alpha x) = \alpha\, T_A(x)$. W T or A es de *rango máximo* cuando el rango es $\operatorname{mín}(m,n)$. Cuando $n = m$, A es de rango máximo si y sólo si $T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invertible.

1.3. $C^r(\Omega)$ = espacio lineal sobre $\mathbb{R}$ de funciones r-veces diferenciables en Ω. Notación para derivadas parciales

$$\begin{aligned} u_{x_j}(x) &= \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \\ &= \lim_{\delta\to 0} \frac{u(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_j+\delta,\ \ldots,\ x_n) - u(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_n)}{\delta} \end{aligned}$$

Cuando hay variables x, y,

$$(\partial_{y_j} u)(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y_j}.$$

Cuando sólo hay $(x_1, \ldots, x_n)$, escribimos

$$\partial_j u(x) = u_{x_j}(x).$$

Gradiente = lista de derivadas parciales

$$\nabla = \mathrm{grad} = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$$

$$\nabla \colon C^1(\Omega) \to C^0(\Omega,\ \mathbb{R}^n)$$

con $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^n$ para $u \in C^1(\Omega)$, $x \in \Omega$. Para funciones de más vectores: $\nabla_y u(x, y)$.

Laplaciano: $\Delta u(x) = (\nabla \cdot \nabla) u(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}$.

1.4. Regla de la cadena para $(u \circ v)(y) = u(v(y))$ (con $u(x) \in \mathbb{R}$):

$$\frac{\partial (u \circ v)}{\partial y_i}(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial v_j}(v(y)) \frac{\partial v_j}{\partial y_j}(y).$$

$$(u \circ v)_{y_i}\big|_y = \sum_{j=1}^n u_{x_j}\big|_{v(y)} (v_j)_{y_i}\big|_y.$$

$$(u \circ v)_{y_i} = \sum_{j=1}^n (u_{x_j} \circ v)\, (v_j)_{y_i}.$$

Con $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_p(x)) \in \mathbb{R}^n$:

$$\big(\frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ v)\big)_k = \sum_{j=1}^n \big((\frac{\partial u_k}{\partial x_j}) \circ v\big)\, \frac{\partial v_j}{\partial_{y_i}}.$$

Matriz jacobiana de $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$,

$$J_u(x) = \frac{\partial(u_1, \ldots, u_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x) = \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}(x)\right)_{k,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial u_p}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial u_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

$J_u(x) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $J_{(u \circ v)} = (J_u \circ v)(J_v)$.

1.5. *Curva* en $\mathbb{R}^n$, $x\colon I \to \mathbb{R}^n$, $x(s) = (x_1(s),\ \dots,\ x_n(s))$ $\quad (s_1 < s < s_2)$. Si x es C^1, su *vector tangente* en $x(s)$ es

$$\frac{dx}{ds}(s) = \big(\frac{dx_1(s)}{ds},\ \dots,\ \frac{dx_n(s)}{ds}\big).$$

Gráfica de una función de n variables $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}(u) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}:\ x \in \Omega,\ y = u(x)\} \\ &= \{(x,u(x)):\ x \in \Omega\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Curva dentro de una gráfica:

$$(x, u(x(s)) = (x_1(s), \dots, x_n(s),\ u(x_1(s), \dots, x_n(s)))$$

tiene vector tangente

$$\big(\ \frac{dx}{ds},\ \langle \nabla u, \frac{dx}{ds} \rangle\ \big).$$

Espacio tangente a la gráfica (hiperplano tangente): {vectores tangentes a curvas en la gráfica}. El vector $(\nabla u, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ es perpendicular al espacio tangente:

$$\langle (\nabla u, -1),\ (\frac{dx}{ds}, \langle \nabla u, \frac{dx}{ds} \rangle) \rangle = 0.$$

luego el hiperplano tangente es $(\nabla u, -1)^{\perp}$. Ecuación en (x^0, x^0_{n+1}) (con $x^0_{n+1} = u(x^0)$):

$$\langle \nabla u(x^0),\ x - x^0 \rangle = x_{n+1} - x^0_{n+1}.$$

1.6. Dada $G(x,y)$, en lugar de escribir formalmente

$$G^{(y)}(x) = u(x,y),\ \ {}^{(x)}G(y) = u(x,y),$$

se puede escribir $G(\cdot, y) = G^{(y)}$, $g(x, \cdot) = {}^{(x)}G$, o sea

$$G(\cdot, y)|_x = G(x,y) = G(x, \cdot)|_y,$$

Cuando

$$G(x, g(x)) = 0$$

decimos que g está definida implícitamente por esta relación.

<u>Teorema.</u> (de la funcion inversa) Sean $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^p$, y $G\colon B \to \mathbb{R}^p$ de clase C^1 en la bola $B = B((a,b),R)$ centrada en $(a,b) \in \mathbb{R}^{m+p}$. Supongamos que $G(a,b) = 0$ y que $J_{G(a,\cdot)}(b)$ es invertible (i.e. de rango p). Entonces existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ con $a \in U$ un abierto $V \subset \mathbb{R}^p$ con $b \in V$ y una $g\colon U \to V$ con $g(a) = b$ tales que para cada $x \in U$ se tiene $(x, g(x)) \in B$ y $G(x, g(x)) = 0$.
Ademas $g = (g_1, \ldots, g_p)$ es de clase C^1 en U y

$$(g_{x_i}) = ((g_1)_{x_i},\ \ldots,\ (g_p)_{x_i}) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

en $x = a$ son las columnas de

$$J_g(a) = -\big(J_{G(a,\cdot)}(b)\big)^{-1} J_{G(\cdot,b)}(a,b).$$

Para funciones de varias variables, fijando x_i, ponemos

$$\widehat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Tenemos una función implícita de $n-1$ variables:
dado $\widehat{x}_i$, sea $X_i(\widehat{x}_i) \in \mathbb{R}$ el valor de x_i para el cual $G(x)$ es cero:

$$G(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ X_i(\widehat{x}_i),\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n) = 0.$$

Cuando $G_{x_i}(x) \neq 0$, el teorema de la función implicita (con $x_i, \widehat{x}_i$ en los papeles de x, y) dice que X_i existe localmente cerca de un x^0 con $G(x^0) = 0$.

1.7. Una ODE se define para una $f\colon \Omega \times I \to \mathbb{R}$, $u\colon I \to \mathbb{R}^n$ es una solución de $u'(s) = f(u(s), s)$ en I cuando u es diferenciable y para todo $s \in I$ tanto $u(s) \in \Omega$ y se tiene $u'(s) = f(u(s), s)$.

Dice que cada vector tangente a lo largo de la curva u es igual al valor de f en el punto correspondiente de $\operatorname{Gr} u$. (Realmente en (x,s) donde $(s,x) \in \operatorname{Gr}(u)$.)

Sea $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, con $f_i\colon \Omega \times I \to \mathbb{R}$ and $u_i\colon I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Entonces $(u_1, \ldots, u_n)$ es solución sí y solo si

1. cada u_i es diferenciable en I,

2. $(u_1(s), \ldots, u_n(s)) \in \Omega$ cuando $s \in I$ y

3. para cada $i = 1, \ldots, n$ y $t \in I$,

$$\frac{du_i}{ds}(s) = f_i(\ (u_1(s), \ldots, u_n(s)),\ \ s\ ).$$

Así la ecuación vectorial $u'(s) = f(u(s), s)$ es equivalente al sistema

$$\frac{du_i}{ds} = f_i(s, u_1, \ldots, u_n) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

1.8. Teorema. (Existencia para ODEs) Sea $f = (f_1, \ldots, f_n)$ continua en $\Omega \times I$, y existen derivadas parciales continuas $(\partial/\partial x_j) f_i(x, s)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Entonces para cada $u^0 \in \Omega$ y $s_0 \in I$, existe $\epsilon > 0$ para cual el sistema

$$\frac{du}{ds} = f(u_1, \ldots, u_n, s)$$

tiene una solucion $u(s) = (u_1(s), \ldots, u_n(s))$ que satisface la condicion inicial $u(s_0) = u^0$ para todo $s \in I$ con $|s - s_0| < \epsilon$. Si dos soluciones coinciden en un valor $s = s_0$, entonces coinciden para todo s.