ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN
Lista 2

(entregar: 28 de febrero)

1. Demostrar que la función $u(x_1,t) = e^{-(x_1-t)^2-t} + (1-x_1+t)e^{-t} + x_1 - 1$ es solución de la PDE dependiente del tiempo $u_{x_1} + u_t + u = x_1$.

2. Demostrar que la función $u(x_1,t) = e^{-2t}\cos(x_1 e^{-t})$ $(t>0)$ es solución de la PDE dependiente del tiempo $x_1 u_{x_1} + u_t + 2u = 0$.

3. Let $w \in C^1(\mathbb{R})$. Demostrar que la función $u(x_1,t) = w\Big(t - \frac{x_1^2}{2}\Big)$ $(t>0)$ es solución de la PDE dependiente del tiempo $u_{x_1} + x_1 u_t = 0$.

4. Sea $w \in C^1(\mathbb{R})$. Demostrar que la función
$$u(x_1,t) = \sin t + w(\sin x_1 - \sin t) \quad (\Omega = \{x_1 : x_1 \neq (k\pi)/2,\ k \in \mathbb{Z}\},\ t>0)$$
es solución de la PDE dependiente del tiempo
$$u_t + \frac{\cos t}{\cos x_1}\, u_{x_1} = \cos t.$$

5. Sean $w \in C^1(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{R}$, $t>0$. Demostrar que la función $u(x_1,t) = t^m w\Big(\frac{x_1}{t}\Big)$ es solución de la PDE dependiente del tiempo $u_t + \frac{x_1}{t}\, u_{x_1} = \frac{m}{t}\, u$.

6. Sea $w \in C^1(\mathbb{R})$, $a>0$. Demostrar que la función
$$u(x_1,t) = w\Big(\frac{x_1}{t} - \arcsin\frac{t}{a} - \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}\Big),$$
$(0 < t \le a)$, es solución de la PDE dependiente del tiempo
$$u_t + \frac{(x_1 - \sqrt{a^2-t^2})}{t}\, u_{x_1} = 0.$$

7. Sea $\Omega = \{x : 0 < x_2 \le 1\}$. Demostrar que la función $u\colon \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,
$$u(x,t) = w\Big(t\, e^{\arcsin x_1}, x_1 x_2 + \frac{t}{2}(x_1 + (1-x_2^2)^{1/2})\Big),$$
es solución de la PDE dependiente del tiempo
$$u_t - \frac{1}{t}(1-x_1^2)^{1/2}\, u_{x_1} + \frac{x_2(1-x_1^2)^{1/2} - x_1 t}{x_1 t}\, u_{x_2} = 0.$$

8. Sean $\Omega = \{x : 0 < x_1, x_2 < 1\}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que la función

$$u(x,t) = w\Big(\frac{t}{x_1}(1-x_1^2)^{1/2}, \frac{x_2 - ax_1}{(1-x_2^2)^{1/2}}, \frac{x_3 - bx_1}{(1-x_1^2)^{1/2}}\Big)$$

es solución de la PDE dependiente del tiempo

$$u_t + \frac{x_1(1-x_1^2)}{t}\, u_{x_1} + \frac{(a - x_1x_2)x_1}{t}\, u_{x_2} + \frac{(b - x_1x_3)x_1}{t}\, u_{x_3} = 0.$$

9. Sean $w \in C^1(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que la función $u(x_1, t)$ definida en forma implícita por $x_1 - bu = w(t - au)$ es solución de la PDE dependiente del tiempo $au_t + bu_{x_1} = 1$.