FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS
Lista 2

(Solución)

1. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n = \mathcal{C}\ell^1(n)$ vectores. Sea $u \perp v$. Demostrar que las reflecciones Refl_u y Refl_v conmutan.

Solución. Por hipótesis $0 = u \cdot v = (1/2)(uv + vw)$, luego $uv = -vw$. Por lo tanto

$$\mathrm{Refl}_v \mathrm{Refl}_u w = \mathrm{Refl}_v \left(\frac{uwu}{|u^2|}\right) = \frac{v\left(\frac{uwu}{|u^2|}\right)v}{|v|^2} = \frac{vuwuv}{|u|^2|v|^2}$$

$$= \frac{(-uv)w(-vu)}{|u|^2|v|^2} = \mathrm{Refl}_u \mathrm{Refl}_v w.$$

Así $\mathrm{Refl}_v \mathrm{Refl}_u = \mathrm{Refl}_u \mathrm{Refl}_v$.

2. (i) Se define $\mathrm{Spin}(n) = \{v_1 v_2 \cdots v_{2k} \colon\ v_j \in \mathcal{C}\ell^1(n),\ |v_j| = 1\}$ (productos de un número par de vectores unitarios, incluyendo el producto vacío e_0). Demostrar que $\mathrm{Spin}(n)$ es un grupo con respecto a la multiplicación.
(ii) Para $s \in \mathrm{Spin}(n)$ defínase la función h_s por $h_s(x) = \overline{s}xs$ para $x \in \mathbb{R}^n = \mathcal{C}\ell^1(n)$. Demostrar que $h_s(x) \in \mathbb{R}^n$ y que $h_s \in SO(n)$. Demostrar que la función $s \mapsto h_s$ es un homomorfismo de grupos: $\mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$.

Solución. (i) El producto de dos productos de un número par de vectores unitarios es otro tal producto, luego $\mathrm{Spin}(n)$ es cerrado bajo multiplicación dentro del grupo multiplicativo $\mathcal{C}\ell(n)$ (es decir, haciendo caso omiso de la adición en el álgebra de Clifford). Contiene la identidad e_0. Cada vector unitario v tiene una inversa $\overline{v} = -v$, luego cada producto de vectores unitarios también tiene una inverso. De esto se sigue que $\mathrm{Spin}(n)$ es un subgrupo.
(ii) $\overline{v}xv = -vxv/|v|^2 = -\mathrm{Refl}_v x \in \mathbb{R}^n$ para $v \in \mathcal{C}\ell^1(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, y la operación $-\mathrm{Refl}_v$ es un elemento de $O(n)$. luego la operación h_s para $s = v_1 v_2 \cdots v_{2k}$ es una composición de un número par de elementos de $O(n)$, es decir, un elemento de $SO(n)$. Además,

$$h_{s's}(x) = \overline{s's}\, x\, s's = \overline{s}(\overline{s'}xs')s = h_s \circ h_{s'}(x),$$

luego $s \mapsto h_s$ es un antihomomorfismo (no precisamente un homomorfismo).

3. Calcular todos los polinomios de Fueter de grados 1 y 2 (en términos de las variables de Fueter, además en términos de la variable x.

Solución. Los polinomios de Fueter de grado 1 son las variables de Fueter

$$\mathcal{P}_{\vec{\delta}_i}(x) = z_i = x_i - x_0 e_i \quad (1 \le i \le n).$$

Los polinomios de Fueter de grado 2 son los productos simetrizados de dos variables de Fueter, que tienen forma diferente según las variables sean iguales o no:

$$\mathcal{P}_{2\vec{\delta}_i}(x) = \frac{1}{2!}(z_i^2 + z_i^2) = z_i^2 = (x_i - x_0 e_i)^2 = (x_i^2 - x_0^2) - 2x_0 x_i e_i \quad (1 \le i \le n);$$

$$\mathcal{P}_{\vec{\delta}_i+\vec{\delta}_j}(x) = \frac{1}{2!}(z_i z_j + z_j z_i) = \frac{1}{2}\big((x_i - x_0 e_i)(x_j - x_0 e_j) + (x_j - x_0 e_j)(x_i - x_0 e_i)\big) =$$
$$= x_i x_j - x_0 x_j e_i - x_0 x_i e_j \quad (i \ne j).$$

4. Demostrar que las potencias $(z_k)^m$ de las variables de Fueter $z_k = x_k - x_0 e_k$ en $\mathcal{C}\ell(n)$ son monogénicos por la izquierda y por la derecha.

Solución. Para $m = 0$ es trivial, y para $m = 1$ es bien conocido, o sea

$$\overline{\partial}(x_k - x_0 e_k) = \overline{\partial} x_k - (\overline{\partial} x_0) e_k = e_k - (1) e_k = 0.$$

Supongamos que $(z_k)^{m-1}$ es monogénico por la izquierda. Notamos que $e_k z_k = z_k e_k$ como consequencia de $e_k x_k = x_k e_k$, $e_k(x_0 e_k) = (x_0 e_k) e_k$. Por lo tanto, $e_k z_k^m = z_k^m e_k$. Por eso,

$$\overline{\partial}(z_k)^m = \overline{\partial}((x_k - x_0 e_k) z^{k-1}) = \overline{\partial}(x_k z^{k-1} - (x_0 e_k) z^{k-1}) = \overline{\partial}(x_k z^{k-1}) - \overline{\partial}(x_0 e_k z^{k-1})$$
$$= \overline{\partial}(x_k z^{k-1}) - \overline{\partial}(x_0 e_k z^{k-1}) = \overline{\partial}(x_k z^{k-1}) - \overline{\partial}(x_0 z^{k-1} e_k).$$

Notamos también que la regla de Leibniz $\overline{\partial}(fg) = (\overline{\partial} f) g + f(\overline{\partial} g)$ es válida cuando f es escalar. Entonces por la hipótesis inductiva,

$$\overline{\partial}(z_k)^m = \big((\overline{\partial} x_k) z^{k-1} + x_k(\overline{\partial} z^{k-1})\big) - \big((\overline{\partial} x_0) z^{k-1} e_k + x_0(\overline{\partial} z^{k-1}) e_k)\big)$$
$$= (\overline{\partial} x_k) z^{k-1} - (\overline{\partial} x_0) z^{k-1} e_k = e_k z^{k-1} - e_0 z^{k-1} e_k = 0.$$

Por lo tanto $(z_k)^m$ es monogénico por la izquierda. La demostración por la derecha es similar.

Demostración alterna: Se sabe que los polinomios de Fueter $\mathcal{P}_{\vec{k}}$ son monogénicos, y las potencias de las variables de Fueter son el caso particular $\vec{k} = (0, \dots, 0, m, 0, \dots)$.

5. Demostrar que los valores que toman los polinomios de Fueter son paravectores.

Solución. El escalar $\mathcal{P}_{\vec{0}}(x) = 1$ y las variables de Fueter $\mathcal{P}_{\vec{\delta}_j}$ son paravectores. Sea $|\vec{k}| \ge 2$ supongamos que la afirmación es válida para polinomios de Fueter de grado $|\vec{k}| - 1$. Escribimos

$$\mathcal{P}_{\vec{k}}(x) = \sum_{A \in 2^n} p_A(x) e_A$$

en forma estándar con polinomios homogéneos $p_A(x) \in \mathbb{R}$ de grado $|\vec{k}|$. Consideremos cualquier A con $|A| \geq 2$, y un término general $a_{\vec{\jmath}} x^{\vec{\jmath}}$ en $p_A(x)$, con la notación $\vec{\jmath} = (j_0, \ldots, j_n)$. Recordemos la fórmula $\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{P}_{\vec{k}} = k_i \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i}$ $(1 \leq i \leq n)$. Si $i \geq 1$ es tal que $j_i \neq 0$, entonces $k_i \mathcal{P}_{\vec{k}-\vec{\delta}_i}(x)$ contiene el monomio $k_i a_{\vec{\jmath}} x^{\vec{\jmath}-\vec{\delta}_i} e_A$ contrario a la hipótesis de inducción. Por lo tanto, no hay tal i, es decir, $\vec{\jmath} = (|\vec{k}|, 0, \ldots, 0)$, lo cual dice que $\mathcal{P}_{\vec{k}}(x)$ es igual a

$$a_{\vec{\jmath}} x_0^{|\vec{k}|} e_A.$$

Todos los términos en $\mathcal{P}_{\vec{k}}(x)$ con $|A| \geq 2$ son de esta forma, los cuales juntamos para escribir

$$\mathcal{P}_{\vec{k}}(x) = p_0(x) + \sum_{i=1}^{n} p_i(x) e_i + x_0^{|\vec{k}|} q \qquad (*)$$

con $q \in \mathcal{C}\ell(n)$ sin parte paravectorial, es decir $[q]_0 = [q_1] = 0$. Entonces

$$\partial_0 \mathcal{P}_{\vec{k}}(x) = \partial_0 p_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_0 p_i(x) e_i + |\vec{k}| x_0^{|\vec{k}|-1} q,$$

$$\partial_j \mathcal{P}_{\vec{k}}(x) = \partial_j p_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_j p_i(x) e_i \quad (1 \leq i \leq n),$$

Sumando, tenemos

$$0 = \overline{\partial} \mathcal{P}_{\vec{k}}(x) = \overline{\partial} p_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \overline{\partial} p_i(x) e_i + |\vec{k}| x_0^{|\vec{k}|-1} q.$$

Por lo tanto la parte antiparavectorial $|\vec{k}| x_0^{|\vec{k}|-1} q$ es cero, luego por $(*)$ $\mathcal{P}_{\vec{k}}(x)$ es paravector.

6. Consideremos el seudovector básico $a = e_1 \cdots e_n \in \mathcal{C}\ell(n)$, así $a^2 = \tau e_0$ donde $\tau = \pm 1$ es un signo que depende de n, es decir $\tau a^2 = 1$.
(i) Demostrar que $a e_i a = (-1)^{n-1} \tau e_i$ para $i \geq 1$.
(ii) Supongamos que n es par. Sea $f(x)$ un paravector en $\mathcal{C}\ell(n)$ (con x en un dominio en $\mathbb{R}^{n+1}$). Demostrar que $afa = \tau \overline{f}$.
(iii) También con n par, demostrar que $a\overline{\partial} a = \tau \partial$.
(iv) Supongamos n par y f diferenciable, valuada en paravectores. Demostrar que f es monogénica por la izquierda si y sólo si f es monogénica por la derecha.

Solución. (i) $e_i a = e_i (e_1 \cdots e_n) = (-1)^{n-1} (e_1 \cdots e_n) e_i = (-1)^{n-1} a e_1$ pues se ha hecho transposición de e_i con las $n-1$ unidades con subíndice distintos de i. Por lo tanto $a e_i a = a (-1)^{n-1} a e_i = (-1)^{n-1} a^2 e_i = (-1)^{n-1} \tau e_i$.
(ii) $afa = a f_0 a + \sum_{i \geq 1} a (f_i e_i) a = f_0 a^2 + \sum_{i \geq 1} f_i (-1)^{n-1} a e_i a$
$= \tau f_0 + (-1)^{n-1} \tau \sum_{i \geq 1} f_i e_i = \tau (f_0 - \sum_{i \geq 1} f_i e_i) = \tau \overline{f}$ puesto que $(-1)^{n-1} = -1$.
(iii) Mismo cálculo simbólico con ∂_i en lugar de f_i.
(iv) $a \overline{\partial} f a = \tau (a \overline{\partial} a)(afa) = \tau (\tau \partial)(\tau \overline{f}) = \tau \partial \overline{f}$. Como a es invertible, tenemos $\overline{\partial} f = 0 \iff \partial \overline{f} = 0 \iff f \overline{\partial} = 0$ lo cual se tenía que demostrar.