FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS $\#14$

ECUACIONES DE LA FÍSICA

14.1. Un aspecto pendiente de polinomios holomorfos: Tenemos una base $\{X^{\pm}_{n,m}\}$ para las funciones en $\mathcal{M}(\mathbb{B}^3,\mathcal{A})\cap Ł^2(\mathbb{B}^3)$. Se puede construir una base para $\mathcal{M}(\mathbb{B}^3,\mathbb{H})\cap Ł^2(\mathbb{B}^3)$ usando $X^{\pm}_{n,m}$ y $X^{\pm}_{n,m}e_3$, eliminando unos duplicados. Con unas combinaciones lineales se puede construir una base ortogonal $\widetilde{X}^{\pm}_{n,m}$ para $\mathcal{M}(\mathbb{B}^3,\mathbb{H})\cap Ł^2(\mathbb{B}^3)$. Cada $X^{\pm}_{n,m}$ es un polinomio homogéneo de grado n.

14.2. En lugar de D actuando en (x_0,x_1,x_2) usaremos el <u>operador de Dirac</u> $\vec{\partial}=\partial_1e_1+\partial_2e_2+\partial_3e_3$. actuando sobre la variable $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$,

$$\ker\vec{\partial}=\{f\colon\ \vec{\partial}f=0\}.$$

Con $f=f_0+f_1e_1+f_2e_2+f_3e_3=f_0+\vec{f}$, se tiene

$$\vec{\partial}f=\vec{\partial}f_0+\vec{\partial}\vec{f}=-\mathrm{div}\,f_0+(\mathrm{grad}f_0+\mathrm{rot}\vec{f}).$$

<u>Proposición.</u> Con $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_0,y_1,y_2)$, sea $x\leftrightarrow y$ por $x=-e_3y$. Sea $f(x)=e_3g(y)$. Entonces $\vec{\partial}f=-\overline{D}g$.

Así $f\in\ker\vec{\partial}\iff g\in\ker\overline{D}$ $(=\mathcal{M}(\mathbb{H}))$. Tenemos un isomorfismo $\Psi\colon\mathcal{M}(\mathbb{H})\xrightarrow{\cong}\ker\vec{\partial}$, $\Psi(g)=f$. Hay una base ortogonal

$$\{\Psi(\widetilde{X}^{\pm}_{n,m})\}$$

para $\ker\overline{\partial}\cap L^2(\mathbb{B}^3)$, también de polinomios homogéneos.

14.3. Un <u>cuaternio complejo</u> es un par $a=(q,q')\in\mathbb{H}\times\mathbb{H}$. Adición: $(p,p')+(q,q')=(p+q,p'+q')$. Multiplicación:

$$(p,p')(q,q')=(pq-p'q',\ pq'+p'q).$$

$\mathbb{H}(\mathbb{C})=\{$cuaternios complejos$\}$. Notación: se escribe $(q,q')=q+iq'$. Se escribe $\mathrm{Re}(q+iq')$, $\mathrm{Im}(q+iq'))=q'$, que son elementos de $\mathbb{H}$. En contraste,

$$\mathrm{Sc}(q+iq')=\mathrm{Sc}\,q+i\,\mathrm{Sc}\,q',\quad \mathrm{Vec}(q+iq')=\mathrm{Vec}\,q+i\,\mathrm{Vec}\,q'.$$

Así, cuando $q = \sum_{j=0}^{3} q_j e_j$, $q' = \sum_{j=0}^{3} q'_j e_j$, se tiene

$$q + iq' = \sum_{j=0}^{3} (q_j + iq'_j) e_j,$$

y

$$(p + ip')(q + iq') = (pq - p'q') + i(pq' + p'q).$$

Se considera $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}(\mathbb{C})$, el subconjunto de cuaternios complejos con parte imaginaria cero.

14.4. $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ contiene divisores de cero. Si $e \in \mathbb{H}$, $e^2 = 1$, entonces $(1 + ie)(1 - ie) = 0$. Además $(1 \pm ie)^2 = 2(1 \pm ie)$. Usaremos $e = e_3$. Los valores $(1/2)(1 \pm ie_3)$ se suman a 1, su producto es cero y cada uno es igual a su propio cuadrado. Por lo tanto, la operación de multiplicación por la derecha da los operadores de proyección $\mathcal{P}^{\pm} \colon \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$,

$$\mathcal{P}^{\pm}(a) = a\frac{1}{2}(1 \pm ie_3) \quad (a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})),$$

que satisfacen $\mathcal{P}^+ + \mathcal{P}^- = I$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^+\mathcal{P}^+ &= \mathcal{P}^+, \qquad & \mathcal{P}^-\mathcal{P}^- &= \mathcal{P}^-, \\ \mathcal{P}^+\mathcal{P}^- &= 0, & \mathcal{P}^-\mathcal{P}^+ &= 0. \end{aligned}$$

Se puede hablar de $\mathbb{H}(\mathbb{C})$-espacios lineales por la derecha o por la izquierda. No usaremos productos internos con valores en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

<u>Lema.</u> Sea $L \colon E_1 \to E_2$ un operador $\mathbb{H}(\mathbb{C})$-lineal por la derecha entre dos espacios $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ por la derecha. Supongamos que hay dos operadores lineales $L_{\pm} \colon E_1 \to E_2$ que dan una descomposición de L,

$$L = \mathcal{P}^+ \circ L_+ + \mathcal{P}^- \circ L_-.$$

Entonces

$$\ker L = \mathcal{P}^+(\ker L_+) \ \oplus \ \mathcal{P}^-(\ker L_-).$$

14.5. $M^a =$ operador de multiplicación por la derecha: $(M^a + b)f = fa + bf$, satisface

$$M^{a+b} = M^a + M^b, \quad M^a M^b = M^{ba}.$$

Casos particulares: $\mathcal{P}^{\pm} = M^{(1 \pm i e_3)/2}$.

14.6. Para evitar confusiones escribemos $z^* = \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z$ para el conjugado de complejos $z \in \mathbb{C}$, dejando $\overline{a} = \operatorname{Sc} a - \operatorname{Vec} a$ para cuaternios.
Así $\mathcal{P}^- = M^{((1+ie_3)/2)^*}$.

Se extiende la conjugación compleja a $\mathbb{H}(\mathbb{C})$: $(\sum_{j=0}^{3} a_j e_j)^* = \sum_{j=0}^{3} a_j^* e_j$.
Así particular, $\overline{(a^*)} = \overline{a}^*$.

La <u>norma</u> de $a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ es is $|a| = (|a_0|^2 + |a_1|^2) + |a_2|^2 + |a_3|^2)^{1/2}$. (Por lo general, $|a|^2$ no es igual a $\overline{a}\, a$.) Para Let $a, b \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$,

$$|ab| \leq \sqrt{2}|a|\,|b|; \quad |\mathcal{P}^{\pm}(a)| \leq |a|.$$

14.7. Decimos que $c\colon [-l, l] \to \mathbb{C}$ continua es un <u>coeficiente propio</u> en $[-l, l]$ cuando $c(0) = 1$ y $c(t) \neq 0$ para $-l \leq t \leq l$.

<u>Definición.</u> Las <u>potencias formales</u> asociadas a c son $\varphi_c^{(j)}\colon [-l, l] \to \mathbb{C}$ $(j \geq 0)$ dadas por

$$\begin{aligned}
&\varphi_c^{(0)}(t) = c(t), \\
&\varphi_c^{(j)}(t) = jc(t) \int_0^t \frac{1}{c(s)} \varphi_{1/c}^{(j-1)}(s)\, \mathrm{d}s \quad (j \geq 1),
\end{aligned}$$

<u>Lema.</u> Sea c diferenciable. Entonces cada $\varphi_c^{(j)}$ es diferenciable,

$$(\varphi_c^{(j)})' = \frac{c'}{c} \varphi_c^{(j)} + j\varphi_{1/c}^{(j-1)} \quad (j \geq 1).$$

<u>Demostración.</u> Por hipótesis $\varphi_c^{(0)}$ es diferenciable. Sea $j \geq 1$.

$$\begin{aligned}
(\varphi_c^{(j)})'(t) &= c'(t)\big(j \int_0^t \frac{1}{c(s)} \varphi_{1/c}^{(j-1)}(s)\, \mathrm{d}s\big) + c(t)\big(j \frac{1}{c(t)} \varphi_{1/c}^{(j-1)}(t)\big) \\
&= \frac{c'(t)}{c(t)} \big(jc(t) \int_0^t \frac{1}{c(s)} \varphi_{1/c}^{(j-1)}(s)\, \mathrm{d}s\big) + j\varphi_{1/c}^{(j-1)}(t). \qquad \square
\end{aligned}$$

14.8. Como $c(t) > 0$ (suponiendo c real), luego $\varphi_c^{(j)}(t) > 0$, y son funciones no-decrecientes de $|t|$. Cuando $c \equiv 0$, $\varphi_c^{(j)}(t)$ es igual a

$$\operatorname{mon}_j(t) = t^j,$$

Por inducción se ve que $j = 0, 1, 2, \dots$ fijo, $\dfrac{\varphi_c^{(j)}(t)}{t^j} \to 1$ cuando $t \to 0$.

14.9. El operador de transmutación escalar (complejo) asociada a c envía mon_j a $\varphi_c^{(j)}$, extendiéndose por linealidad a los polinomios con coeficientes complejos:

$$T_c\big(\sum_{j=0}^{N} a_j \,\mathrm{mon}_j\big) = \sum_{j=0}^{N} a_j \varphi_c \quad (a_j \in \mathbb{C}).$$

Proposición. Hay un operador lineal acotado actuando en functiones $\mathbb{C}$-valuadas,

$$T_c \colon L^2[-l,l] \to L^2[-l,l]$$

con inversa acotada, tal que $T_c(\mathrm{mon}_j) = \varphi_c^{(j)}$ $(j \geq 0)$. Deja invariantes los subespacios $C^0[-l,l]$ y $C^1[-l,l]$, y es acotado en las normas respectivas $\|f\|_\infty$, $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Es más, hay un coeficiente propio $\tilde{c}$ que genera el operador inverso: $T_{\tilde{c}} = (T_c)^{-1}$.

14.10. Teorema. Sea $f \in C^1[-l,l]$. Entonces $(\frac{1}{c} T_c f)' = \frac{1}{c}(T_{1/c} f')$, es decir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\frac{1}{c(t)} T_c(f)(t)\big) = \frac{1}{c(t)} T_{1/c}(f')(t).$$

Demostración. Por la densidad de los polinomios en $C^1[-l,l]$ y por linealidad, basa demostrarlo para $f = \mathrm{mon}_j$. Para este caso tenemos

$$\begin{aligned}
\big(\frac{1}{c} T_c(\mathrm{mon}_j)\big)' &= -\frac{c'}{c^2}(T_c \mathrm{mon}_j) + \frac{1}{c}(T_c \mathrm{mon}_j)' \\
&= -\frac{c'}{c}\varphi_c^{(j)} + \frac{1}{c}\big(\frac{c'}{c}\varphi_c^{(j)} + j\varphi_{1/c}^{(j-1)}\big) \\
&= j\varphi_{1/c}^{(j-1)} \\
&= T_{1/c}(j \mathrm{mon}_{j-1}) \\
&= T_{1/c}(\mathrm{mon}'_{j-1}). \qquad \square
\end{aligned}$$

14.11. Proposición. $\varphi_{c^*}^{(j)} = (\varphi_c^{(j)})^*, \quad T_{c^*}(f) = (T_c(f^*))^*.$

14.12. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio acotado tal que

para cada $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$*, el segmento desde* $(x_1, x_2, -x_3)$ *a* (x_1, x_2, x_3) *está contenido en* Ω*.*

Tomamos $l = \text{máx}\{x_3\colon\ (x_1, x_2, x_3) \in \Omega\}$ y $c(x_3)$ complejo-valuada en $[-l, l]$. Nótese que el complenmento de Ω es conexo.

Entenderemos T_c, $T_{1/c}$ como aplicados con respecto a la variable x_3 para cada (x_1, x_2) fijo. (Envían funciones de (x_1, x_2, x_3) a funciones de (x_1, x_2, x_3).)

<u>Definición.</u> El <u>operador de transmutación complejo-cuaterniónico</u> asociado a c,

$$\mathbb{T}_c\colon C^0(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) \to C^0(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})),$$

se define por

$$\mathbb{T}_c(f)(x) = T_{1/c}(f_0)(x) + T_c(f_1)(x)e_1 + T_c(f_2)(x)e_2 + T_{1/c}(f_3)(x)e_3,$$

para $f = f_0e_0 + f_1e_1 + f_2e_2 + f_3e_3 \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$. $T_c, T_{1/c}$ siempre se aplican a x_3, más precisamente

$$T_c(h)(x) = T_c(h_{x_1,x_2})(x_3),$$

donde $h_{x_1,x_2}(x_3) = h(x_1, x_2, x_3)$.

$\mathbb{T}_c$ no es lineal sobre $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ por la derecha, pero

<u>Lema.</u> f, g funciones $\mathbb{H}(\mathbb{C})$-valuadas, $a_j \in \mathbb{C}$ $(0 \leq j \leq 3)$. Entonces

- $\operatorname{Sc} \mathbb{T}_c(f) = \mathbb{T}_c(\operatorname{Sc} f)$, $\operatorname{Vec} \mathbb{T}_c(f) = \mathbb{T}_c(\operatorname{Vec} f)$.
- $\mathbb{T}_c(f + g) = \mathbb{T}_c(f) + \mathbb{T}_c(g)$.
- $\mathbb{T}_c(M^{a_0+a_3e_3}(f)) = M^{a_0+a_3e_3}\, \mathbb{T}_c(f)$, en particular,
$$\mathcal{P}^{\pm}\, \mathbb{T}_c = \mathbb{T}_c\, \mathcal{P}^{\pm}.$$
- $\mathbb{T}_c(M^{a_1e_1+a_2e_2}(f)) = M^{a_1e_1+a_2e_2}\, \mathbb{T}_{1/c}(f)$, en particular,
$$\mathcal{P}^{\pm}\, \mathbb{T}_c(fe_j) = \mathbb{T}_{1/c}(\mathcal{P}^{\pm}(fe_j))$$
para $j = 1, 2$.

- Para $K \subseteq \Omega$ compacto, $\mathbb{T}_c$ es acotado en $C^0(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ con respecto a la seminorma $\|f\|_K = \sum_{j=0}^{3} \max_K |f_j|$; o sea

$$\begin{aligned}\| \mathbb{T}_c(f)\|_K &\leq N_1 \max_K |f_0| + N_1 \max_K |f_1| + N_2 \max_K |f_2| + N_2 \max_K |f_3| \\ &\leq N\|g\|_K,\end{aligned}$$

  donde N_1, N_2 sólo dependen de $c(x_3)$, y $N = \max(N_1, N_2)$. Escribiremos $\|\mathbb{T}_c\|_K$ para su norma.

- La inversa de $\mathbb{T}_c$ es

$$T_c^{-1}(f)(x) = T_{1/c}^{-1}(f_0)(x) + T_c^{-1}(f_1)(x)e_1 + T_c^{-1}(f_2)(x)e_2 + T_{1/c}^{-1}(f_3)(x)e_3.$$

14.13. Teorema. Para $f \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$,

$$\left(\vec{\partial} + M^{\frac{c'}{c}e_3}\right) \mathbb{T}_c(f) = \mathbb{T}_{1/c}(\vec{\partial} f).$$

Demostración. La parte escalar del lado izquierdo es

$$-\mathrm{div}\,(\mathrm{Vec}\,\mathbb{T}_c(f)) - \frac{c'}{c}T_{1/c}(f_3) = -\partial_1 T_c(f_1) - \partial_2 T_c(f_2) - \partial_3 T_{1/c}(f_3) - \frac{c'}{c}T_{1/c}(f_3).$$

(Nota: distinguir T_c de $\mathbb{T}_c$.) Tenemos $\partial_1 T_c(f_1) = T_c(\partial_1 f_1)$ y $\partial_2 T_c(f_2) = T_c(\partial_2 f_2)$ porque T_c sólo actúa en la variable x_3. Para ∂_3, escribiendo $u' = \mathrm{d}u/\,\mathrm{d}x_3$, primero notar (por un teorema, con $1/c$ en lugar de c)

$$\begin{aligned}T_c(u') &= \frac{1}{c}(c'T_{1/c}u + c(T_{1/c}u)' \\ &= (c'/c)T_{1/c}(u) + (T_{1/c}u)'.\end{aligned}$$

Aplíquese esto a $u = f_3$, cancelando:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sc}\left(\vec{\partial} + M^{\frac{c'}{c}e_3}\right) \mathbb{T}_c(f) &= -T_c(\partial_1 f_1) - T_c(\partial_2 f_2) - T_c(\partial_3 f_3) \\ &= -\,\mathrm{Sc}\,\mathbb{T}_{1/c}(\mathrm{div}\vec{f}) \\ &= \mathbb{T}_{1/c}(\mathrm{Sc}\,\vec{\partial} f) \\ &= \mathrm{Sc}\left(\,\mathbb{T}_{1/c}(\vec{\partial} f)\right),\end{aligned}$$

luego la partes escalares de los dos lados son iguales. Para las partes vectoriales es similar. □ □

Corolario. Sea $f \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$. Entonces

$$\begin{aligned} f \in \ker \vec{\partial} &\iff \mathbb{T}_c(f) \in \ker\big(\vec{\partial} + M^{\frac{c'}{c}e_3}\big) \\ &\iff \mathbb{T}_{1/c}(f) \in \ker\big(\vec{\partial} - M^{\frac{c'}{c}e_3}\big). \end{aligned}$$

14.14. Teorema. Sean $\lambda, \widetilde{\lambda} \in C^0[-l, l]$ con $\lambda(x_3), \widetilde{\lambda}(x_3) \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\vec{\partial} + \lambda + M^{\widetilde{\lambda}e_3} = \mathcal{P}^+\big(\vec{\partial} + M^{(\widetilde{\lambda}+i\lambda)e_3}\big) + \mathcal{P}^-\big(\vec{\partial} + M^{(\widetilde{\lambda}-i\lambda)e_3}\big),$$

actuando en $C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$.

Otra forma de escribirlo dadas $\alpha(e_3), \beta(e_3) \in \mathbb{C}$.

$$\vec{\partial} + (\alpha+\beta)/2 + M^{((\alpha-\beta)/(2i))e_3} = \mathcal{P}^+\big(\vec{\partial} + M^{\alpha e_3}\big) + \mathcal{P}^-\big(\vec{\partial} + M^{\beta e_3}\big).$$

Demostración.

$$\mathcal{P}^+\big(\vec{\partial} + M^{(\widetilde{\lambda}+i\lambda)e_3}\big) + \mathcal{P}^-\big(\vec{\partial} + M^{(\widetilde{\lambda}-i\lambda)e_3}\big) = (\mathcal{P}^+ + \mathcal{P}^-)\vec{\partial} + M^a,$$

donde

$$\begin{aligned} a &= (\widetilde{\lambda} + i\lambda)e_3\frac{1}{2}(1 + ie_3) + (\widetilde{\lambda} - i\lambda)e_3\frac{1}{2}(1 - ie_3) \\ &= \lambda + \widetilde{\lambda}e_3, \end{aligned}$$

y notar que $M^{\lambda+\widetilde{\lambda}e_3} = \lambda + M^{\widetilde{e}_3}$ por ser λ un escalar complejo. □

14.15. Cualquier $\lambda\colon [-l, l] \to \mathbb{C}$ integrable determina un coeficiente propio c por

$$c(t) = e^{\int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s},$$

que es diferenciable y $\dfrac{c'}{c} = \lambda$.

Teorema. Sean $\lambda, \widetilde{\lambda} \in C^0([-l, l])$, sean $\dfrac{(c_+)'}{c_+} = \widetilde{\lambda} + i\lambda$, $\dfrac{(c_-')}{c_-} = \widetilde{\lambda} - i\lambda$.

Supóngase que $f \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ satisface $(\vec{\partial} + \lambda + M^{\widetilde{\lambda}e_3})f = 0$. Entonces hay funciones $\mathbb{H}$-valuadas $w_+, w_- \in \ker \vec{\partial}$ únicas tales que

$$f = \mathbb{T}_c(\mathcal{P}^+ w_+) + \mathbb{T}_{\widetilde{c}}(\mathcal{P}^- w_-),$$

Toda f que sea de esta forma (para $w_\pm \in \ker\vec{\partial}$ arbitrarias) está en $\ker(\vec{\partial}+\lambda+M^{\widetilde{\lambda}e_3})$.

Demostración. Sea

$$u_+ = \mathcal{P}^+\,\mathbb{T}_{c_+}^{-1}(f), \quad u_- = \mathcal{P}^-\,\mathbb{T}_{c_-}^{-1}(f).$$

Recordemos que $\lambda i e_3$ y $(1+ie_3)/2$ conmutan, y que $\mathcal{P}^\pm$ conmutan con with $\vec{\partial}$ y $\mathbb{T}_{c_\pm}$. Por eso

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{1/c_\pm}(\vec{\partial}u_\pm) &= (\vec{\partial}+M^{(c'_\pm/c_\pm)e_3})\,\mathbb{T}_{c_\pm}\,\mathcal{P}^\pm\,\mathbb{T}_{c_\pm}^{-1}(f)\\ &= \mathcal{P}^\pm(\vec{\partial}+M^{(\widetilde{\lambda}\pm i\lambda)e_3})(f).\end{aligned}$$

Luego la hipótesis implica que $\mathbb{T}_{1/c_+}(\vec{\partial}u_+)+\mathbb{T}_{1/c_-}(\vec{\partial}u_-)=0$. Ambos sumandos con cero por que están en las imágenes de los proyectores complementarios $\mathcal{P}^\pm$. Por ser $\mathbb{T}_{1/c_\pm}$ invertible, $\vec{\partial}u_\pm=0$.

Ahora definimos $w_\pm = 2\operatorname{Re}u_\pm$. Satisfacen $\vec{\partial}w_\pm = 0$, y por ser $\mathbb{H}$-valuadas, $\mathcal{P}^\pm w_\pm = \mathcal{P}^\pm u_\pm = u_\pm$. Como $\mathcal{P}^+ + \mathcal{P}^- = I$,

$$f = \mathcal{P}^+ f + \mathcal{P}^- f = \mathbb{T}_{c_+}u_+ + \mathbb{T}_{c_-}u_-$$

lo cual da la descomposition.

Unicidad: escribimos $f = \mathcal{P}^+\,\mathbb{T}_{c_+}w_+ + \mathcal{P}^-\,\mathbb{T}_{c_-}w_-$, que muestra que $\mathbb{T}_{c_+}w_+$ y $\mathbb{T}_{c_-}w_-$ están determinadas por f, luego $w_\pm$ están determinadas por f. □

14.16. Daremos un sistema completo de funciones en $\ker(\vec{\partial}+\lambda+M^{\widetilde{\lambda}e_3})$. Consideremos el conjunto denumerable

$$\mathcal{F}(\lambda,\widetilde{\lambda}) = \{T_{c^+}(\mathcal{P}^\pm\Psi q),\ T_{c^-}(\mathcal{P}^\pm\Psi q)\},$$

donde q varía sobre la base $\{\widetilde{X}^\pm_{n,m}\}$, y donde $c^\pm$ corresponden a $\widetilde{\lambda}\pm i\lambda$, y $\Psi\colon\ \ker\overline{D}|_{e_3\Omega} \xrightarrow{\equiv} \ker\vec{\partial}|_\Omega$.

Teorema. Sea $(\vec{\partial}+\lambda+M^{\widetilde{\lambda}e_3})f = 0$ en Ω. Entonces f se puede aproximar por combinaciones lineales de $\mathcal{F}(\lambda,\widetilde{\lambda})$ uniformemente en cada subconjunto compacto $K\subseteq\Omega$.

Demostración. Sea $\epsilon>0$, sea $K\subseteq\Omega$ compacto. Expresemos $f = \mathbb{T}_{c_+}\,\mathcal{P}^+w_+ + \mathbb{T}_{c_-}\,\mathcal{P}^-w_-$ donde $\vec{\partial}w_\pm = 0$, $w_\pm(x)\in\mathbb{H}$. Aplicamos el teorema de aproximación de Runge a las funciones monogénicas $\Psi^{-1}w_\pm$

para obtener polinomios aproximantes $q_\pm \in \ker \overline{D}$, es decir

$$\left|\Psi^{-1} w_\pm(y) - q_\pm(y)\right| \leq \frac{\epsilon}{\text{máx}(\| \mathbb{T}_{c_+} \|_K,\ \| \mathbb{T}_{c_-} \|_K)},$$

para todo $y \in e_3 K$. Como Ψ no es más que un cambio de notación,

$$|w_\pm(x) - p_\pm(x)| \leq \frac{\epsilon}{\text{máx}(\| \mathbb{T}_{c_+} \|_K,\ \| \mathbb{T}_{c_-} \|_K)},$$

donde $p_\pm = \Psi q_\pm \in \ker \vec{\partial}$. Defínase $g_\pm = \mathbb{T}_{c_\pm} \mathcal{P}^\pm p_\pm \in \mathcal{F}(\lambda, \widetilde{\lambda})$, and $g = g_+ + g_-$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq \left| \mathbb{T}_{c_+} \mathcal{P}^+ w_+(x) - \mathbb{T}_{c_-} \mathcal{P}^+ p_+(x) \right| + \left| \mathbb{T}_{c_-} \mathcal{P}^- w_-(x) - \mathbb{T}_{c_-} \mathcal{P}^- p_-(x) \right| \\ &= |(\mathbb{T}_{c_+}(w_+ - p_+)(x)| + |\mathbb{T}_{c_-}(w_- - p_-)(x)| \\ &\leq \| \mathbb{T}_{c_+} \|_K |w_+(x) - p_+(x)| + \| \mathbb{T}_{c_-} \|_K |w_-(x) - p_-(x)| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

como g es una combinación lineal de elementos de $\mathcal{F}(\lambda, \widetilde{\lambda})$, está completa la demonstración. □

14.17. Aplicamos lo anterior a equaciones de la física matemática para obtener sistemas completos de soluciones.

Un campo vectorial complejo en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es una función de Ω a $\mathbb{C}^3$, considerada como vector-valuada: $\vec{F} = \text{Vec}\,\vec{F} \colon \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$; o sea, $\text{Sc}\,\vec{F} = 0$.

Definición. Un *campo de Beltrami* en Ω es $\vec{F}$ que satisface

$$\text{rot}\vec{F} + \lambda \vec{F} = 0.$$

La función $\lambda \colon \Omega \to \mathbb{C}$ se llama *potential* del campo de Beltrami.

Supondremos $\lambda(x_3)$ que el potencial depende sólo de x_3, y Ω es simétrico-estrellado con respecto a x_3. Escribimos la ecuación para el campo de Beltrami en otra forma:

Proposición. Sea $\lambda(x_2)$ de clase C^1. which depends only on x_3. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial complejo en Ω. Supongamos $\lambda(x_3)$ no se anula, y ponemos

$$\vec{f} = \sqrt{\lambda}\, \vec{F} \qquad (*)$$

(cualquier $\sqrt{\lambda}$ continua). Entonces $\vec{F}$ es un Beltrami field con potencial λ si y sólo si

$$(\vec{\partial} + \lambda + M^{\lambda'/(2\lambda)e_3})\vec{f} = 0.$$

<u>Demostración.</u> Tenemos

$$\partial_1\sqrt{\lambda} = \partial_2\sqrt{\lambda} = 0, \quad \partial_3\sqrt{\lambda} = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{f} &= \partial_1(\sqrt{\lambda}\,F_1) + \partial_2(\sqrt{\lambda}\,F_2) + \partial_3(\sqrt{\lambda}\,F_3) \\
&= \sqrt{\lambda}\,\mathrm{div}\,\vec{F} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\frac{\lambda'}{\lambda}F_3, \\
\mathrm{rot}\vec{f} &= \big(\partial_2(\sqrt{\lambda}F_3) - \partial_3(\sqrt{\lambda}F_2)\big)e_1 + \big(\partial_1(\sqrt{\lambda}F_3) - \partial_3(\sqrt{\lambda}F_1)\big)e_2 \\
&\quad + \big(\partial_1(\sqrt{\lambda}F_2) - \partial_2(\sqrt{\lambda}F_1)\big)e_3 \\
&= \sqrt{\lambda}\mathrm{rot}\vec{F} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\frac{\lambda'}{\lambda}(-F_2e_1 + F_1e_2).
\end{aligned}$$

Primero supongamos $\vec{F}$ es campo de Beltrami con potencial λ. Como $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\vec{F} = 0$, tenemos

$$\mathrm{div}\vec{F} + \frac{\lambda'}{\lambda}F_3 = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
(\vec{\partial} + \lambda + M^{\lambda'/(2\lambda)e_3})\vec{f} &= (-\mathrm{div}\vec{f} + \mathrm{rot}f) + \lambda\vec{f} + \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}\vec{f}e_3 \\
&= -(\mathrm{div}\vec{F} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\frac{\lambda'}{\lambda}F_3) + (\sqrt{\lambda}\,\mathrm{rot}\vec{F} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\frac{\lambda'}{\lambda}(-F_2e_1 + F_1e_2)) \\
&\qquad + \sqrt{\lambda}\lambda\vec{F} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\frac{\lambda'}{\lambda}(-F_3 + F_2e_1 - F_1e_2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos la ecuación para f. Las partes escalar y vectorial son

$$\begin{aligned}
0 &= -\mathrm{div}\vec{f} + \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda} f_3, \\
0 &= \mathrm{rot}\vec{f} + \lambda\vec{F} + \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}(f_2 e_1 - f_1 e_2) \\
&= \sqrt{\lambda}\mathrm{rot}\vec{F} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\frac{\lambda'}{\lambda}(-F_2 e_1 + f_1 e_2) + \lambda\sqrt{\lambda}\vec{F} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}(\sqrt{\lambda}F_2 e_1 - \sqrt{\lambda}F_1 e_2) \\
&= \sqrt{\lambda}(\mathrm{rot}\vec{F} + \lambda\vec{F}),
\end{aligned}$$

luego $\vec{F}$ es campo de Beltrami. □

Corolario. Cada campo de Beltrami con pontencial diferenciable $\lambda(x_3)$ que no se anula puede aproximarse uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω por sumas finitas de la forma

$$\vec{F} = \sqrt{\lambda}\sum_{j=1}^{N} r_j g_j$$

con funciones $g_j \in \mathcal{F}(\lambda, \lambda'/(2\lambda))$ y coeficientes $r_j \in \mathbb{R}$.

Demostración. Poner $\vec{F} = \sqrt{\lambda}\vec{f}$ como en $(*)$. Hay una suma $\sum_{j=1}^{N} r_j g_j$ uniformemente cercana a $\vec{f}$ en K. El resultado se sigue porque $|\sqrt{\lambda}|$ es acotada inferiormente en K. □

14.18. Definición. Un campo Trkaliano es un campo de Beltrami con potencial constante.

Las funciones g_j en la aproximación de $\vec{F}$ pueden no ser campos vectoriales, sólo que la suma de sus partes escalares tiende a cero. Con los campos Trkalianos se puede obtener mejores resultados.

Definición. Con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f = f_0 + \vec{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$,

$$\mathcal{V}_\lambda(f) = \mathrm{Vec}\, f + \frac{1}{\lambda}\vec{\partial}\,\mathrm{Sc}\, f = \vec{f} + \frac{1}{\lambda}\vec{\partial} f_0.$$

Por construcción, $\mathrm{Sc}\,\mathcal{V}_\lambda f = 0$. Para $\vec{f}$ vectorial, $\mathcal{V}_\lambda(\vec{f}) = \vec{f}$.

Cuando $\mathrm{Vec}\, F$ es Trkaliano, $\mathcal{V}_\lambda(\vec{F}) = \vec{F}$. y $\vec{F}$ satisface la ecuación de Helmholtz

$$(\Delta + \lambda^2)\vec{F} = 0.$$

Proposición. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$.
(i) Si $(\lambda + \vec{\partial})f = 0$, entonces $(\lambda + \vec{\partial})\mathcal{V}_\lambda f = 0$y por tanto

$$\mathcal{V}_\lambda\colon\ \ker(\lambda + \vec{\partial})\big|_{C^0(\Omega,\mathbb{H}(\mathbb{C}))|} \to \ker(\lambda + \vec{\partial})\big|_{C^0(\Omega,\mathrm{Vec}\,\mathbb{H}(\mathbb{C}))|}$$

es un operador lineal sobreyectivo.
(ii) Si además $\mathrm{Sc}\, f = 0$, i.e. si $f = \vec{F}$ es Trkaliano, entonces $\mathcal{V}_\lambda \vec{F} = \vec{F}$.

Proposición. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces

$$\ker(\lambda + \vec{\partial}) = \ker \mathcal{V}_\lambda \oplus \ker(\lambda + \vec{\partial})\big|_{C(\Omega,\mathrm{Vec}\,\mathbb{H}(\mathbb{C})}$$

(espacios de funciones $\mathbb{H}(\mathbb{C})$-valuadas).

Proposición. El conjunto

$$\mathcal{V}_\lambda \mathcal{F}(\lambda, 0) = \{\mathcal{V}_\lambda q\colon\ \ q \in \mathcal{F}(\lambda, 0)\}$$

es completo con respecto a la convergencia compacto-uniforme en los campos Trkalianos con potencial λ.

14.19. Ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{E} &= 0,\\
\mathrm{div}\vec{H} &= 0,\\
\mathrm{rot}\vec{E} &= 0,\\
\mathrm{rot}\vec{H} &= -i\omega\vec{F},\\
\vec{F} &= \varepsilon(\vec{E} + \beta\mathrm{rot}\vec{E}),\\
\vec{B} &= \mu(\vec{H} + \beta\mathrm{rot}\vec{H}),
\end{aligned}$$

con $\beta, \mu, \varepsilon, \omega$ constantes positivas, mientras que $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{F}$ con campos vectoriales complejas incógnitas. Una vez conocidos $\vec{E}$ y $\vec{H}$, se encuentran $\vec{F}$ y $\vec{B}$ con las dos últimas ecuaciones.

Teorema. Dadas cualquier soluciones $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{F}$ de las ecuaciones de Maxwell en Ω, el par $(\vec{E}, \vec{H})$ puede aproximarse uniformemente en compatos Ω por combinaciones lineales de la forma

$$\Big(\frac{-1}{\sqrt{\mu}}(\mathcal{V}_{\lambda_+}(q_+) + \mathcal{V}_{\lambda_-}(q_-)), \quad \frac{-i}{\sqrt{\epsilon}}(\mathcal{V}_{\lambda_+}(q_+) - \mathcal{V}_{\lambda_-}(q_-)\,)\Big),$$

donde $q_\pm$ son elementos de $\mathcal{F}(\lambda_\pm, 0)$ respectivamente y

$$\lambda_\pm = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\omega\beta\sqrt{\varepsilon\mu} \pm 1}.$$

Demostración. Definimos los campos

$$\begin{aligned} \vec{e}(x) &= -\sqrt{\mu}\,\vec{E}(x), \\ \vec{h}(x) &= \sqrt{\varepsilon}\,\vec{H}(x). \end{aligned}$$

Luego sea $\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, de manera que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{e} &= -i\alpha(\vec{h} + \beta\operatorname{rot}\vec{h}), \\ \operatorname{rot}\vec{h} &= i\alpha(\vec{e} + \beta\operatorname{rot}\vec{e}). \end{aligned}$$

Pongamos

$$\lambda_\pm = \frac{\alpha}{\alpha\beta \pm 1},$$

que convierte las ecuaciones en

$$(\vec{\partial} + \lambda_\pm)(\vec{e} \pm i\vec{h}) = 0.$$

Es decir, $\vec{e} \pm i\vec{h} \in \ker(\vec{\partial} + \lambda_\pm)$, por lo que se puede aproximar por combinaciones lineales de funciones de la forma $\mathcal{V}_{\lambda_\pm} q_\pm$, con $q_\pm \in \mathcal{V}_{\lambda_\pm}\mathcal{F}(\lambda_\pm, 0)$. Esto nos da las aproximaciones para $\vec{E}$ y $\vec{H}$. $\square$