POLINOMIOS MONOGÉNICOS

13.1. Investigaremos los polinomos monogénicos de tres variables para los cuales la componente e_3 es cero, es decir, que toman valores en

$$\mathcal{A} = \{x = (x_0, x_1, x_2) = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2\} \subseteq \mathbb{H}.$$

Puesto que no existe una variable x_3, los operadores de Fueter se reducen a

$$\overline{D} = \partial_0 + \partial_1 e_1 + \partial_2 e_2,$$
$$D = \partial_0 - \partial_1 e_1 - \partial_2 e_2.$$

13.2. Un polinomio homogéneo de grado n típico es $p \in \mathrm{Pol}_3^{(n)}(\mathcal{A})$,

$$p(x) = \sum_{j_0+j_1+j_2=n} b_0^{j_0j_1j_2} x_1^{j_0} x_1^{j_1} x_2^{j_2} + b_1^{j_0j_1j_2} x_1^{j_0} x_1^{j_1} x_2^{j_2} e_1 + b_2^{j_0j_1j_2} x_1^{j_0} x_1^{j_1} x_2^{j_2} e_2. \tag{1}$$

Recordemos que el número de triples (j_0, j_1, j_2) de enteros no-negativos tales que $j_0 + j_1 + j_2 = n$ is igual a

$$N_{\mathrm{v}}(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

13.3. Proposición. La dimensión sobre $\mathbb{R}$ de la colección de polinomios homogéneos monogénicos de grado n es $2n + 3$.

Demostración. Todos los polinomios de grado $n = 0$ son monogénicos, y siendo $\mathcal{A}$-valuadas, $\mathcal{M}^{(0)}(\mathcal{A})$ es de dimensión 3 que es igual a $2 \times 0 + 3$. Sea $n \geq 1$. Calculamos que

$$\overline{D}p(x) = \sum_{i_0+i_1+i_2=n-1} \big(a_0^{i_0,i_1,i_2} x_1^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} + a_1^{i_0,i_1,i_2} x_1^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} e_1$$
$$+ a_2^{i_0,i_1,i_2} x_1^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} e_2 + a_3^{i_0,i_1,i_2} x_1^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} e_3\big),$$

donde

$$a_0^{i_0i_1i_2} = \big(-(i_2+1)b_2^{i_0,i_1,i_2+1} - (i_1+1)b_1^{i_0,i_1+1,i_2} + (i_0+1)b_0^{i_0+1,i_1,i_2}\big)\, x_1^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} + \cdots,$$
$$a_1^{i_0i_1i_2} = \big((i_1+1)b_0^{i_0,i_1+1,i_2} + (i_0+1)b_1^{i_0+1,i_1,i_2}\big)\, x_1^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} + \cdots,$$
$$a_2^{i_0i_1i_2} = \big((i_2+1)b_0^{i_0,i_1,i_2+1} + (i_0+1)b_2^{i_0+1,i_1,i_2}\big)\, x_1^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} + \cdots,$$
$$a_3^{i_0i_1i_2} = \big(-(i_2+1)b_1^{i_0,i_1,i_2+1} + (i_1+1)b_2^{i_0,i_1,i_2+1}\big)\, x_1^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} + \cdots.$$

Todos los términos omitidos, un número finito de monomios indicados por "$\cdots$", tienen exponentes que son distintos de (i_0, i_1, i_2). Todos los coeficientes $\pm(i_\alpha + 1)$ son distintos del cero. No es necesario que $\overline{D}p(x) \in \mathcal{A}$ aun cuando $(\forall x)\ p(x) \in \mathcal{A}$, por la presencia de productos $e_1 e_2$.

Supongamos que p es monogénico. Entonces $a_k^{i_0 i_1 i_2} = 0$ para cada triple (i_0, i_1, i_2). Éste es un sistema de m_e equations in m_v variables $b_l^{j_0,j_1,j_2}$, where

$$m_e = 4\,N_\mathrm{v}(n-1) = 2n(n+1),$$
$$m_v = 3\,N_\mathrm{v}(n) = \frac{3(n+1)(n+2)}{2},$$

porque $0 \le k \le 3$, $0 \le l \le 2$.

Ordenamos los coeficientes $b_l^{j_0,j_1,j_2}$ lexicográficamente por (j_0, j_1, j_2, l). Denotemos por $\varphi(i_0, i_1, i_2, k)$ los índices del primer término no-cero en la ecuación indexada por (i_0, i_1, i_2, k). Los coeficientes enlistados arriba se dan en orden lexicográfico, por lo que

$$\varphi(i_0, i_1, i_2, 0) = (i_0, i_1, i_2 + 1, 2),$$
$$\varphi(i_0, i_1, i_2, 1) = (i_0, i_1 + 1, i_2, 0),$$
$$\varphi(i_0, i_1, i_2, 2) = (i_0, i_1, i_2 + 1, 0),$$
$$\varphi(i_0, i_1, i_2, 3) = (i_0, i_1, i_2 + 1, 1),$$

Supongamos ahora que $\varphi(i_0, i_1, i_2, k) = \varphi(i_0', i_1', i_2', k')$. aunque $(i_0, i_1, i_2, k) \neq (i_0', i_1', i_2', k')$. Afirmamos que

$$\{k, k'\} = \{1, 2\} \text{ y } i_1' - i_1 = -(i_2' - i_2) = \pm 1.$$

Para verlo, escribimos $(j_0, j_1, j_2, l) = \varphi(i_0, i_1, i_2, k)$. Cada renglón del de la lista de valores de φ hace referencia a un valor diferente de k. Si $l \neq 0$, es un caso del primer o el cuarto renglón, i.e. $l = 2$, $k = k' = 0$, or alternativamente $l = 1$, $k = k' = 3$. En cualquiera de estos dos casos $k = k'$ $(\in \{0, 3\})$, y $(i_0, i_1, i_2 + 1) = (i_0', i_1', i_2' + 1)$, lo cual contradice el supuesto que los parámetros son distintos. Por lo tanto, $l = 0$. Por lo tanto (i_0, i_1, i_2, k) e (i_0', i_1', i_2', k') son casos del segundo o tercer renglón, $\{k, k'\} \subseteq \{1, 2\}$. Si sucediera que $k = k'$, el mismo razonamiento daría la misma contradicción. Por lo tanto $k \neq k'$, es decir $\{k, k'\} = \{1, 2\}$. Supongamos primero que $k = 1$,

$k' = 2$. Nuevamente de acuerdo con las fórmulas para φ tenemos $(i_0, i_1 + 1, i_2, 0) = (i'_0, i'_1, i'_2 + 1, 0)$, lo cual da la conclusión que se afirmaba. Si $k = 2$, $k' = 1$ da la versión de la conclusión con la otra elección del signo ± 1.

En consecuencia, dos de las ecuaciones lineales del sistema tendrán su primer coeficiente con la misma variable $b_l^{j_0,j_1,j_2}$ solamente cuando $i'_0 = i_0$, $i'_1 = i_1 \pm 1$, $i'_2 = i_2 \mp 1$ (y luego k, k' quedarán determinados). Tales ecuaciones ocurren en pares, o sea, nunca más de dos, porque cuando (j_0, j_1, j_2, l) está fijo, solamente hay dos soluciones posibles para $\{k, k'\} = \{1, 2\}$ y $i'_1 - i_1 = -(i'_2 - i_2) = \pm 1$. Para cada pareja, una de las ecuaciones tieneen tal caso el signo superior y el otro el signo inferior, por lo que para fines de contar las parejas supondremos el signo superior.

Observemos que en un tal par de ecuaciones, nunca sucede que $i_0 + i_1 = n$ porque i_2 seria cero, luego $i'_2 < 0$, lo cual en tal casoes imposible. Por lo tanto $i_0 + i_1 \leq n - 1$. Por una observación referente al conteo de los triples, el número de estos pares de ecuaciones es

$$m_d = N_v(n-1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si quitamos una ecuación de cada par, quedamos con un sistema de ecuaciones con cada uno con un primer $b_l^{j_0,j_1,j_2}$ diferente, y que puede resolverse para cada un a de estas variables. Por lo tanto, el rango del sistema es igual a $m_e - m_d$. Esto implica que el número de soluciones es

$$m_v - (m_e - m_d) = 2n + 3. \qquad \square$$

13.4. Definimos

$$X_{n,m}^{\pm} = DU_{n+1,m}^{\pm} \quad (0 \leq m \leq n+1).$$

Como siempre, por convención no existe $X_{n,0}^{-}$ pues no existe $U_{n+1,0}^{-}$. Entonces $X_{n,m}^{\pm}$ es monogénica.

Proposición. Sea $n \geq 0$. $\{X_{n,m}^{\pm}\colon\ 0 \leq m \leq n+1\}$ es una base sobre $\mathbb{R}$ de $\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{A}) = \{$polinomios homogéneos monogénicos $\mathcal{A}$-valuadas de grado $n\}$.

Demostración. Consideremos el operador lineal $D\colon \mathrm{Har}_3^{(n+1)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{A})$. Si $Dh = 0$, entonces $\partial_0 h = \partial_1 h = \partial_2 h = 0$, o sea h es constante. Como $h \in \mathrm{Pol}_3^{(n+1)}$, $h = 0$. Entonces ∂ es injectiva, por lo que base $\{X^{\pm}_{n,m}\} = \{DU^{\pm}_{n+1,m}\}$ es linealmente independente. Es una base porque tiene $2n+3 = \dim \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{A})$ elementos. $\square$

13.5. Ya hemos hecho el cálculo que da

$$X^{\pm}_{n,m} = (n+m+1)U^{\pm}_{n,m}$$
$$+\Big(\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}U^{\pm}_{n,m-1} - \frac{1}{2}U^{\pm}_{n,m+1}\Big)e_1$$
$$\mp\Big(\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}U^{\mp}_{n,m-1} + \frac{1}{2}U^{\mp}_{n,m+1}\Big)e_2.$$

Cuando $m = 0$, la fórmula para $X^{\pm}_{n,0}$ incluye $U^{\pm}_{n,-1}$ que tiene que ser interpretada como

$$U^{\pm}_{n,-1} = \mp\frac{1}{n(n+1)}\,U^{\pm}_{n,1}.$$

Además, para $m = n$, en $X^{\pm}_{n,n}$ aparece $U^{\mp}_{n,n+1} = 0$, y en $X^{\pm}_{n,n+1}$ aparece $U^{\mp}_{n,n+2} = 0$.

13.6. Mas datos generales sobre funciones monogénicas.

Proposición. Sea f monogénica (por la izquierda) y $\mathcal{A}$-valuada. Entonces $\overline{f}$ es antimonogénica (por la izquierda), y f es monogénica por la derecha. (No es cierto para funciones $\mathbb{H}$-valuadas).

Demostración. Si expresamos la ecuación $\overline{D}f = 0$ como $\alpha+\beta e_1+\gamma e_2+\delta e_3$, entonces la ecuación $f\overline{D} = 0$ se expresa como $\alpha+\beta e_1+\gamma e_2-\delta e_3$, y serán iguales a 0 simultáneamente. Por lo tanto, f es monogénica por la derecha, y luego

$$D\overline{f} = \overline{(f\overline{D})} = 0,$$

por lo que $\overline{f}$ es antimonogénica. $\square$

13.7. Una *constante monogénica* es una función f tal que $Df = \overline{D}f = 0$.

Proposición. Si la función f ($\mathcal{A}$-valuada) es una constante monogénica, entonces $\mathrm{Sc}\, f$ es constante y $f_1 - if_2$ es una función holomorfa de $x_1 + ix_2$. Si f es monogénica y $\mathrm{Sc}\, f$ es constante, entonces f es una constante monogénica.

Demostración. f es constante monogénica $\iff (\partial_0 \pm \vec{D})f = 0 \iff \partial_0 f = 0$, $\vec{D}f = 0$. Sea f constante monogénica, entonces no depende de x_0, y

$$0 = \vec{D}f = \vec{D}f_0 + \vec{D}\vec{f}$$

Los sumandos están en $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ y $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_3$ respectivamente, luego ambos son cero: $\vec{D}f_0$ dice que f_0 tampoco depende de x_1, x_2, luego es constante. Además $\vec{D}\vec{f} = -(\partial_1 f_1 - \partial_2 f_2) + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)e_3$ son las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
Recíprocamente, supóngase que f es monogénica y f_0 es constante. Entonces $D\vec{f} = Df = 0$, es decir $\vec{f}$ es monogénica. Entonces también es monogénica por la derecha, luego

$$Df = D\vec{f} = \overline{(-\vec{f})\overline{D}} = 0.$$

Por lo tanto f es una constante monogénica. □

(El concepto de constante monogénica existe en cualquier $\mathcal{C}\ell(n)$. En el caso de $\mathbb{C}$, las constantes monogénicas son constantes.)

13.8. Proposición. $X^{\pm}_{n,n+1}$ son constantes monogénicas;
para $n \geq 1$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{A}) \cap \overline{\mathcal{M}}^{(n)}(\mathcal{A})) = 2$.

Demostración. $\operatorname{Sc} X^{\pm}_{n,n+1} = (2n+2)U^{\pm}_{n,n+1} = 0$, luego $X^{\pm}_{n,n+1}$ es una constante monogénica. Sea $f \in \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{A})$ una constante monogénica. Entonces se puede expresar en la base $\{X^{\pm}_{n,m}\}$ como

$$f = \sum_{0 \leq m \leq n+1} a^{\pm}_{n,m} X^{\pm}_{n,m}.$$

Como $\operatorname{Sc} f = 0$ y $\operatorname{Sc} X^{\pm}_{n,n+1} = 0$, tenemos

$$\sum_{0 \leq m \leq n} a^{\pm}_{n,m} \operatorname{Sc} X^{\pm}_{n,m} = 0.$$

Pero las partes escalares $\operatorname{Sc} X^{\pm}_{n,m}$ son, salvo por factores constantes, los armónicos esféricos $U^{\pm}_{n,m}$, que son linealmente independientes. Por lo tanto $a^{\pm}_{n,m} = 0$ para $m < n+2$, por lo que f es una combinación lineal de las dos constantes monogénicas $\operatorname{Sc} X^{\pm}_{n,n+1}$. □

13.9. Teorema. $\{X^{\pm}_{n,m} \colon\ 0 \leq n < \infty,\ 0 \leq m \leq n+1\}$ es una base ortogonal de $\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{A}) \cap L^2(\mathbb{B}^3)$.

Demostración. Para $n \neq n'$, tenemos $\langle X^{\pm}_{n,m},\ X^{\pm}_{n',m}\rangle = 0$ porque $\{U^{\pm}_{n,m},\ U^{\pm}_{n',m}$ son ortogonales (para m, m' arbitrarios). Sea $m \neq m'$, calculamos (!) $\langle X^{\pm}_{n,m},\ X^{\pm}_{n,m'}\rangle = 0$ para todas las cuatro combinaciones de $(\pm, \pm)$. Así queda verificado que la colección completa $\{X^{\pm}_{n,m}\}$ es un sistema ortogonal.
Ahora fijamos n y sea $f \in \mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{A}) \cap L^2(\mathbb{B}^3)$. Expresamos la parte escalar

$$f_0 = \sum_m a^{\pm}_m U^{\pm}_{n,m}.$$

Consideremos la función $\mathcal{A}$-valuada

$$g = \sum_m \frac{a^{\pm}_m}{n+m+1} X^{\pm}_{n,m}.$$

entonces $\mathrm{Sc}(g - f) = 0$, por lo que $h = g - f$ es una constante monogénica. Por los resultados anteriores, h es una combinación lineal de las dos funciones $X^{\pm}_{n,n+1}$, luego la diferencia $f = g - h$ es una combinación lineal de las $X^{\pm}_{n,m}$ (variando m).
Ahora sea $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \cap L^2(\mathbb{B}^3)$. Entonces f es real-analítica, con una serie que converge en L^2 y la parte homogénea de grado n está en $\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{A})$, y por tanto una combinación lineal de $X^{\pm}_{n,m}$. Esto muestra que $\{X^{\pm}_{n,m}\}_{n,m}$ genera todo $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \cap L^2(\mathbb{B}^3)$, y por la ortogonalidad es una base. □

FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS $\#14$

FUNCIONES CONTRAGÉNICAS

14.1. Cada función f_0 escalar armónica es la parte escalar de una $f \in \mathcal{M}(A)$.

Demostración. Sabemos que para un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ el operador de Teodorescu

$$T_\Omega f(w) = \frac{-1}{\pi} \int_\Omega \frac{f(z)}{z - w}\, dx\, dy$$

satisface $(\partial T_\Omega f(z))/(\partial \overline{z}) = f(z)$. Tomamos $\Omega = \{|z| < 1\}$. Sea $w(z) = w_1(z) + i w_2(z) = T_\Omega(\partial_0 f_0)(z)$, luego

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial y}) = \partial_0 f_0, \quad \frac{1}{2}(\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y}) = 0.$$

Definimos

$$\vec{v}(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} w_1(x_1 + ix_2)e_1 + \frac{1}{2} w_2(x_1 + ix_2)e_2,$$

luego $(\partial_1 e_1 + \partial_2 e_2)\vec{v} = \partial_0 f_0$. Sea

$$f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 = -\int_0^{x_0} (\partial_1 e_1 + \partial_2 e_2) f_0(t, x_1, x_2)\, dt - \vec{v}(x_1, x_2)$$

que está bien definido para $x \in \mathbb{B}^3$. Entonce se checa que

$$f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2.$$

es monogénica por ser f_0 armónica. □

14.2. Proposición. Toda función armónica $h = h_0 + h_1 e_1 + h_2 e_2 + h_3 e_3$ tomando valores en $\mathbb{H}$ es la suma de una función monogénica y una antimonogénica $\mathbb{H}$-valuadas.

Demostración. Hay una función $\vec{f}$ tal que $h_0 + \vec{f}$ es monogénica. Luego

$$h_0 = \frac{1}{2}(h_0 + \vec{f}) + \frac{1}{2}(h_0 - \vec{f})$$

es suma de una monogénica y una antimonogénica. Así $h_0, h_1 e_1, h_2 e_2, h_3 e_3$, son sumas de monogénicas y antimonogénicas, y se sigue lo mismo para h. □

14.3. Dimensiones de unos espacios

	$n = 0$	$n \geq 1$
$\mathrm{Har}_3^{(n)}(\mathbb{R})$	1	$2n + 1$
$\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{A}),\ \overline{\mathcal{M}}^{(n)}(\mathcal{A})$	3	$2n + 3$
$\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{A}) \cap \overline{\mathcal{M}}^{(n)}(\mathcal{A})$	3	2
$\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{A}) + \overline{\mathcal{M}}^{(n)}(\mathcal{A})$	3	$4n + 4$
$\mathrm{Har}^{(n)}(\mathcal{A})$	3	$6n + 3$

De esta tabla se ve que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}^{(n)}(\mathcal{A}) + \overline{\mathcal{M}}^{(n)}(\mathcal{A})) < \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Har}^{(n)}(\mathcal{A})$.

Proposición. No toda función armónica $h = h_0 + h_1 e_1 + h_2 e_2$ tomando valores en $\mathcal{A}$ es la suma de una función monogénica y una antimonogénica $\mathcal{A}$-valuadas.

Definición. Un elemento de $\mathcal{M}(\mathcal{A})+\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ se llama ambigénica. Un elemento de $\mathcal{N} = (\mathcal{M}(\mathcal{A})+\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A}))^{\perp} \subseteq \mathrm{Har}_3(\mathcal{A}) \cap L^2(\mathbb{B})$ se llama contragénica. Se escribe $\mathcal{N}^{(n)} = \mathcal{N} \cap \mathrm{Pol}_3^{(n)}$.

Proposición. $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{N}^{(n)} = 2n-1$.

Proposición. Las siguientes funciones forman una base ortogonal de $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{N}^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
Z_0^n &= U_{n,1}^{-} e_1 - U_{n,1}^{+} e_2, \\
Z_{m,+}^n &= (c_{n,m} U_{n,m-1}^{-} + U_{n,m+1}^{-}) e_1 + (c_{n,m} U_{n,m-1}^{+} - U_{n,m+1}^{+}) e_2, \\
Z_{m,-}^n &= (c_{n,m} U_{n,m-1}^{+} + U_{n,m+1}^{+}) e_1 + (-c_{n,m} U_{n,m-1}^{-} + U_{n,m+1}^{-}) e_2, \quad (2)
\end{aligned}$$

donde $c_{n,m} = (n-m)(n-m+1)$.