FUNCIONES HIPERHOLOMORFAS $\#12$

POLINOMIOS ARMÓNICOS

Se pueden formar espacios interesantes de funciones $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, y hasta $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Vamos a concentrarnos en funciones de tres variables, es decir

$$x = (x_0, x_1, x_2) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3.$$

12.1. La representación de las funciones monogénicas en series de polinomios de Fueter es un primer paso en el entendimiento de

$$\mathcal{M}(\Omega) = \{\text{funciones monogénicas por la izquierda}\}.$$

Para ir más profundo, primero tenemos que asentar varios hechos sobre las funciones armónicas. Nos limitaremos a funciones de tres variables. Las funciones armónicas son real-analíticas, y sus series de potencias son sumatorias de polinomios homogéneos. Cada uno de los sumandos es un polinomio armónico $h_n \in \mathrm{Pol}_3^{(n)}$. Pongamos

$$\mathrm{Har}_3^{(n)} = \mathrm{Har} \cap \mathrm{Pol}_3^{(n)}$$

(funciones $\mathbb{R}$-valuadas). Cada $p \in \mathrm{Pol}_3^{(n)}$ (no necesariamente armónica) se expresa como

$$p(x) \quad = \sum_{j_0+j_1+j_2=n} b_{j_0 j_1 j_2}\, x_0^{j_0} x_1^{j_1} x_2^{j_2}. \tag{1}$$

con $b_{j_0 j_1 j_2} \in \mathbb{R}$. El multiíndice (j_0, j_1, j_2) varía sobre el conjunto

$$I_n = \{(j_0, j_1, j_2) \colon\; j_\alpha \in \mathbb{Z},\; j_\alpha \geq 0,\, j_0 + j_1 + j_2 = n\}.$$

La dimensión de $\mathrm{Pol}_3^{(n)}$ es igual al número de posibles coeficientes en $p(x)$, es decir $\dim \mathrm{Pol}_3^{(n)} = N_{\mathrm{v}}(n)$ donde

<u>Lema.</u>

$$N_{\mathrm{v}}(n) = \#I_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Demostración. Como j_0 va desde 0 hasta n, y para cada j_0 fijo, j_1 va desde 0 hasta $n-j_0$ (dejando determinado el índice restante $j_2 = n - j_0 - j_1$, tenemos $n - j_0 + 1$ valores de j_1 para cada j_0:

$$N_{\mathrm{v}}(n) = \sum_{j_0=0}^{n}(n-j_0+1) = \sum_{j_0=0}^{n}(n+1) - \sum_{j_0=0}^{n} j_0 = (n+1)^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$$

lo cual se reduce al valor deseado. $\square$

Nota. De la demostración se ve que $N_{\mathrm{v}}(n)$ también se puede describir como el número de pares de enteros no-negativos (j_0, j_1) tales que $j_0 + j_1 \leq n$.

Proposición. $\dim \mathrm{Har}_3^{(n)} = 2n + 1$.

Demostración. Aplicamos el laplaciano $\Delta = \partial^2/\partial x_0^2 + \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ a $p(x)$:

$$\begin{aligned} q(x) &= \Delta p(x) = \sum_{j_0+j_1+i_2=n} b_{j_0 j_1 i_2}\, \Delta(x_1^{j_0} x_1^{j_1} x_2^{j_2}) \\ &= \sum_{i_0+i_1+i_2=n-2} a_{i_0 i_1 i_2}\, x_1^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Como Δ es operador lineal, en la última sumatoria los coeficientes $a_{i_0 i_1 i_2}$ se pueden expresar como

$$a_{i_0 i_1 i_2} = \sum_{j_0+j_1+j_2=n} c_{i_0 i_1 i_2}^{j_0 j_1 j_2}\, b_{j_0 j_1 j_2}. \tag{3}$$

Para que $p \in \mathrm{Har}_3^{(n)}$ se requiere $q = 0$, es decir todos los $a_{i_0 i_1 i_2}$ son cero, que es equivalente a que los $b_{j_0 j_1 j_2}$ satisfagan el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j_0+j_1+i_2=n} c_{i_0 i_1 i_2}^{j_0 j_1 j_2}\, b_{j_0 j_1 j_2} = 0, \quad i_0 + i_1 + i_2 = n - 2. \tag{4}$$

El número $N_{\mathrm{e}}(n)$ de ecuaciones en este sistema (una ecuación para cada triple (i_0, i_1, i_2)) es

$$N_{\mathrm{e}}(n) = N_{\mathrm{v}}(n-2).$$

Los únicos coeficientes para los cuales $c_{i_0 i_1 i_2}^{j_0 j_1 j_2} \neq 0$ son para los cuales sus índices satisfacen

$$(j_0, j_1, j_2) \in \{(i_0+2, i_1, i_2),\ (i_0, i_1+2, i_2),\ (i_0, i_1, i_2+2)\}.$$

Fijamos una correspondencia 1-a-1 entre los triples en I_n y los enteros $1, 2, \ldots, N_{\mathrm{v}}(n)$ por medio del orden lexicográfico ("orden de diccionario"), que significa que (j_0, j_1, j_2) precede a (j_0', j_1', j_2') cuando $j_0 < j_0'$, y también cuando $j_0 = j_0'$ y $j_1 < j_1'$, y también cuando $j_0 = j_0'$ y $j_1 = j_1'$ y $j_2 < j_2'$. De esta manera, en la correspondencia $(j_0, j_1, j_2) \leftrightarrow l$, el triple $(0, 0, n)$ corresponde a $l = 1$ y $(n, 0, 0)$ corresponde a $l = N_{\mathrm{v}}(n)$.

La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales simultáneas (4) es

$$M \;=\; (c_{i_0 i_1 i_2}^{j_0 j_1 j_2})_{(i_0 i_1 i_2),(j_0 j_1 j_2)}.$$

Al identificar $(i_0, i_1, i_2) \leftrightarrow k$ and $(j_0, j_1, j_2) \leftrightarrow l$ en la correspondencia lexicográfica, la matriz es

$$M \;=\; (c_k^l)_{k,l},$$

donde $1 \leq k \leq N_{\mathrm{e}}(n)$, $1 \leq l \leq N_{\mathrm{v}}(n)$. Cada uno de los $N_{\mathrm{e}}(n)$ renglones corresponde a una ecuación $a_{i_0 i_1 i_2} = 0$, mientras que cada una de las $N_{\mathrm{v}}(n)$ columnas corresponde a una variable $b_{j_0 j_1 j_2}$ en estas ecuaciones. Podemos dibujar la matriz M como

$$\begin{array}{cc} & \underline{b^{j_0 j_1 j_2} \leftrightarrow l} \\ \underline{a^{i_0 i_1 i_2} \leftrightarrow k} & \left(\begin{array}{cccccc} & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_k^l & \cdots \\ & & & & \vdots & \end{array}\right)_{\substack{1 \leq k \leq N_{\mathrm{e}}(n) \\ 1 \leq l \leq N_{\mathrm{v}}(n)}} \end{array}$$

El k-ésimo renglón tiene un primer elemento no-cero, que se encuentra digamos en la columna $l = f(k)$. Esto puede expresarse como $(j_0, j_1, j_2) = f(i_0, i_1, i_2)$, donde $f\colon I_{n-2} \to I_n$. Se ve fácilmente que $f(i_0, i_1, i_2) = (i_0, i_1, i_2 + 2)$ y de esto f es inyectiva. De hecho, f es una función creciente de k. Por lo tanto el rango de la matriz M es igual al número $N_{\mathrm{e}}(n)$ de renglones. Se sigue que la dimensión del espacio de soluciones es

$$d_3(n) = N_{\mathrm{v}}(n) - N_{\mathrm{e}}(n) = 2n + 1. \qquad \square$$

12.2. Ahora veremos cómo escribir el laplaciano bajo cualquier cambio de coordenadas

$$x = (x_0, x_1, x_2) \stackrel{f}{\mapsto} (y_0, y_1, y_2).$$

Lema. Sea (y_0, y_1, y_2) cualquier sistema de coordenadas en un dominio de $\mathbb{R}^3$. Entonces el laplaciano $\Delta_x = \partial^2/\partial x_0^2 + \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ se expresa en términos de las y-derivadas como sigue (sumatorias con índices de 0 a 2):

$$\Delta_x u = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} \sum_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial u}{\partial y_j} \sum_i \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2}.$$

Demostración. Por la Regla de la Cadena (en estas sumas todas las índices corren de 0 a 2),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_j \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2} \right) \\
&= \sum_j \left(\left(\sum_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2} \right)
\end{aligned}$$

lo cual lleva a la fórmula deseada. □

12.3. Una superficie de nivel para las coordenadas (y_0, y_1, y_2) es un conjunto en las coordenadas (x_0, x_1, x_2) donde uno de los valores y_i es constante. Al diferenciar la fórmula $y_i(x_0(t), x_1(t), x_2(t)) = c$ encontramos que todos los vectores tangentes a una superficie de nivel son ortogonales al gradiente $\nabla_x y_i$ de y_i.

Se dice que (y_0, y_1, y_2) es un sistema de coordenadas ortogonales para (x_0, x_1, x_2) cuando *en todo punto del dominio x, los vectores normales a las tres superficies de nivel son ortogonales*, es decir, los tres gradientes

$$\nabla_x y_0, \ \nabla_x y_1, \ \nabla_x y_2$$

son mutuamente ortogonales. Para un sistema ortogonal, por definición el producto escalar de dos columnas de la matriz jacobiana es

$$\sum_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \delta_{jk} |\nabla_x y_j|^2.$$

para cualesquier j, k. Al sustituir esto en la fórmula del Lema tenemos lo siguiente.

Proposición. Sea (y_0, y_1, y_2) un sistema de coordenadas ortogonales. Sea $u(x_0, x_1, x_2)$ una función de clase C^2. Entonces

$$\Delta_x u = \sum_j |\nabla_x y_j|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} + \sum_j (\Delta_x y_j) \frac{\partial u}{\partial y_j}. \tag{5}$$

12.4. Vamos a dedicar la mayor parte de lo que sigue al estudio de funciones en la 3-bola $\mathbb{B}^3$. Las coordenadas esféricas son $(y_0, y_1, y_2) = (r, \theta, \phi)$ donde

$$\begin{aligned} x_0 &= r\cos\theta, \\ x_1 &= r\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \\ x_2 &= r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi. \end{aligned}$$

Ejercicio. Las coordenadas esféricas son un sistema de coordenadas ortogonales en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

La matriz jacobiana de $(r, \theta, \phi) \mapsto (x_0, x_1, x_2)$ es

$$\frac{\partial(x_0, x_1, x_2)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & r\cos\theta\operatorname{sen}\phi & r\operatorname{sen}\theta\cos\phi \end{pmatrix}$$

y su inversa es

$$\frac{\partial(r, \theta, \phi)}{\partial(x_0, x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta\cos\phi}{r} & \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\phi}{r} \\ 0 & -\dfrac{\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta} & \dfrac{\cos\phi}{r\operatorname{sen}\theta} \end{pmatrix}.$$

Los renglones son los gradientes $\nabla_x r$, $\nabla_x \theta$, $\nabla_x \phi$ y claramente son ortogonales. Sus valores absolutos son

$$|\nabla_x r| = 1, \quad |\nabla_x \theta| = \frac{1}{r}, \quad |\nabla_x \phi| = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}.$$

La transformación inversa es

$$r = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan\frac{x_2}{x_1}, \quad \phi = \arctan\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_0}$$

y al diferenciar dos veces obtenemos los laplacianos

$$\Delta_x r = \frac{2}{r}, \quad \Delta_x \theta = 0, \quad \Delta_x \phi = \frac{\cot \phi}{r^2}.$$

De esto, tenemos el Laplaciano en coordenadas esféricas:

Proposición.

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left(r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right).$$

12.5. Vamos a investigar una mejor base para los armónicos, formada de polinomios homogéneos *ortogonales*. Nos limitaremos a la bola unitaria $\mathbb{B}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ y considerar $p \in \mathrm{Har}^{(n)}(\mathbb{B}^3)$.

12.6. Imaginemos una función armónica en forma de producto de funciones de r, de θ y de ϕ por separado. Los cálculos se simplificarán tomando

$$u(x_0, x_1, x_2) = R(r)\Theta(\cos\theta)\Phi(\phi).$$

Esto implica inmediatamente que Φ es 2π-periódica, y que $R(r)$ tenga un límite finito cuando $r \to 0$. Claramente

$$\begin{aligned}
(\partial u)/(\partial r) &= R'\Theta\Phi,\\
(\partial^2 u)/(\partial r^2) &= R''\Theta\Phi,\\
(\partial u)/(\partial \theta) &= (-\operatorname{sen}\theta)R\Theta'\Phi,\\
(\partial^2 u)/(\partial \theta^2) &= (\operatorname{sen}^2\theta)R\Theta''\Phi - (\cos\theta)R\Theta'\Phi,\\
(\partial^2 u)/(\partial \phi^2) &= R\Theta\Phi''.
\end{aligned}$$

Al sustituir estas derivadas en la fórmula de la proposición, obtenemos

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\big(r^2R''\Theta\Phi + 2rR'\Theta\Phi + (\operatorname{sen}^2\theta)R\Theta''\Phi - (2\cos\theta)R\Theta'\Phi + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}R\Theta\Phi''\big),$$

válido para $r > 0$. Con el supuesto que u es armónica, multiplicamos por $r^2\operatorname{sen}^2\theta/R\Theta\Phi$ y nos queda la ecuación

$$\left(r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R}\right) + \left(\operatorname{sen}^2\theta\frac{\Theta''}{\Theta} - 2\cos\theta\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}\right) = 0.$$

El primer término es función sólo de r, y el segundo sólo de (θ, ϕ). Por lo tanto ambos tienen que ser constantes, luego para el primero digamos

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R''}{R} = n(n+1).$$

(La expresión $n(n+1)$ no cambia cuando se substituye n' con $n+n' = -1$, por lo que suponemos $n \geq 0$.) Las soluciones a esta ecuación son $R(r) = a_1 r^n + a_2 r^{-n-1}$, y como u es continua en $x = 0$ tenemos $a_2 = 0$. De la ecuación diferencial queda ahora

$$\operatorname{sen}^2\theta\left(\operatorname{sen}^2\theta\frac{\Theta''}{\Theta} - 2\cos\theta\frac{\Theta'}{\Theta} + n(n+1)\right) + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

Nuevamente los dos términos son constantes, digamos

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = m^2.$$

Entonces $\Phi = a^+\Phi_m^+ + a^-\Phi_m^-$ donde escribimos

$$\Phi_m^+(\phi) = \cos m\phi, \quad \Phi_m^-(\phi) = \operatorname{sen} m\phi.$$

El requisito que $\Phi(\theta)$ sea 2π-periódica implica que m sea un entero. Descartamos $m < 0$ porque tales $\Phi_m^\pm$ se expresan en términos de las mismas funciones trigonométricas para $m \geq 0$: $\Phi_{-m}^\pm = \pm\Phi_m^\pm$. Dado que $\Phi_0^- = 0$ idénticamente, nunca usamos esta combinación de índices. La última parte es una ecuación en θ, que prefirimos expresar con $t = \cos\theta$,

$$(1-t^2)\Theta''(t) + 2t\Theta'(t) + (n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2})\Theta(t) = 0$$

with $|t| < 1$. Ésta es la ecuación diferencial de Legendre con parámetros n, m. La solución general es $\Theta = a_1 P_n^m + a_2 Q_n^m$ donde P_n^m, Q_n^m son las funciones de Legendre del primer y segundo tipo. Dado que $Q_n^m(t)$ tiene una singularidad cuando $|t| = 1$, es decir cuando $\theta = 0, \pi$, necesariamente $a_2 = 0$.

12.7. Se definen los <u>armónicos esféricos sólidos</u> en coordenadas esféricas como

$$U_{n,m}^\pm(x) = r^n P_n^m(\cos\theta)\Phi_m^\pm(\phi)$$

donde $n \geq 0$ y $0 \leq m \leq n$. Son $2n+1$ funciones porque por definición excluimos $U_{n,0}^-$ pues se anula idénticamente.

<u>Proposición.</u> $U_{n,m}^\pm(x) \in \mathrm{Har}_3^{(n)}$.

12.8. <u>Proposición.</u> (gradiente de los armónicos esféricos sólidos)

$$\frac{\partial}{\partial x_0}U_{n,m}^\pm = (n+m)U_{n-1,m}^\pm,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}U^{\pm}_{n,m} = \frac{(n+m-1)(n+m)}{2}U^{\pm}_{n-1,m-1} - \frac{1}{2}U^{\pm}_{n-1,m+1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}U^{\pm}_{n,m} = \mp\big(\frac{(n+m-1)(n+m)}{2}U^{\mp}_{n-1,m-1} + \frac{1}{2}U^{\mp}_{n-1,m+1}\big).$$

Demostración. Sabemos que $\partial_0 u = (\cos\theta)\partial_r u - ((\operatorname{sen}\theta)/r)\partial_\theta u$. Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x_0}U^{\pm}_{n,m}(x) = r^{n-1}\big(n\cos\theta P^m_n(\cos\theta) + \operatorname{sen}^2\theta(P^m_n)'(\cos\theta)\big)\Phi^{\pm}_m(\phi).$$

Es una función de grado $n-1$, por lo que buscamos la manera de reemplazar $(P^m_n)'$ con algo de la forma $P^{m_1}_{n_1}$. De las muchas relaciones "de recurrencia" entre las funciones de Legendre contiguas y sus derivadas, escogemos

$$(t^2-1)(P^m_n)'(t) = ntP^m_n(t) - (n+m)P_{n-1}(t),$$

válida para $|t|<1$, que con la sustitución $t=\cos\theta$ nos da

$$\frac{\partial}{\partial x_0}U^{\pm}_{n,m}(x) = r^{n-1}((n+m)P^m_{n-1}(t))\Phi^{\pm}_m(\phi) = (n+m)U^{\pm}_{n-1,m}(x).$$

Los cálculos para $\partial/\partial x_1$ y $\partial/\partial x_2$ son un poco más complicados. Tenemos primero

$$\frac{\partial}{\partial x_1}U^{\pm}_{n,m}(x) = r^{n-1}\big(P^m_n(\cos\theta)(n\sin\theta\cos\phi\,\Phi^{\pm}_m(\phi) \pm m\csc\theta\sin\phi\,\Phi^{\mp}(\phi))$$

$$-(P^m_n)'(\cos\theta)\cos\theta\sin\theta\cos\phi\,\Phi^{\pm}_m(\phi).\big)$$

Nuevamente tenemos que hacer algo con P^m_n. La sustitución para $(t^2-1)(P^m_n)'(t)$ produce

$$r^{n-1}\big(P^m_n(\cos\theta)\csc\theta(m\sin\phi\,\Phi^{\pm}(\phi) \pm n\cos\phi\,\Phi^{\pm}_m(\phi))$$

$$-(n+m)P^m_{n-1}(\cos\theta)\cot\theta\cos\phi\,\Phi^{\pm}_m(\phi)\big).$$

Queda todavía un $P^m_n(\cos\theta)$, al cual aplicamos la relación de recurrencia

$$\frac{2m}{\sqrt{2-t^2}}P^m_n(t) = P^{m+1}_{n-1}(t) - (m+n-1)(m+n)P^{m-1}_{n-1}(t),$$

la cual afecta también al índice m. El resultado es

$$\frac{r^{n-1}}{2m}\big(((m+n-1)(m+n)P^{m-1}_{n-1}(\cos\theta)+$$

$$P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta))(m\sin\phi\,\Phi_m^{\mp}(\phi) \mp n\Phi_1^{\pm}(\phi)\Phi_m^{+}(\phi))$$
$$-2m(n+m)\cot\theta\cos\phi\Phi_m^{\pm}(\phi)P_{n-1}^{m}(\cos\theta)\big)$$

El último término contiene P_{n-1}^m, al cual aplicamos la relación de recurrencia

$$\frac{2mt}{\sqrt{1-t}}P_n^m(t) = (m+n-1)(m+n)P_n^{m-1}(t) - P_n^{m+1}(t)$$

para obtener

$$\frac{r^{n-1}}{2}\big(P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta)(\Phi_1^{\pm}(\phi)\Phi_m^{+}(\phi) \mp \Phi_1^{\mp}(\phi)\Phi_m^{-}(\phi))$$

$$-(m+n-1)(m+n)P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta)(\Phi_1^{\mp}(\phi)\Phi_m^{+}(\phi) \mp \Phi_1^{\mp}(\phi)\Phi_m^{-}(\phi)).$$

Con la fórmula trigonométrica $\Phi_1^{\pm}\Phi_m^{\pm} = (1/2)(\Phi m-1^{+} \pm \Phi_{m+1}^{+})$ se reduce a la fórma deseada.

La fórmula para $\partial/\partial x_2$ puede obtenerse de una manera muy similar. □

Lema. Sea $u(x_1,\ldots,x_d)$ una función diferenciable en d variables tal que todas las derivadas $\partial u/\partial x_i$ son polinomios. Entonces u también es un polinomio.

Demostración. Cuando $d=1$ está claro pues el polinomio $q = du/dx_1$ tiene una antiderivada p tal que p es un polinomio, y la diferencia $u-p$ es una constante. Inductivamente supongamos que es cierto para dimensión $d-1$. El polinomio $q = \partial u/\partial x_d$ tiene una antiderivada con respecto a x_d que es un polinomio, y la diferencia $u - p = c(x_1,\ldots,x_{d-1})$ no depende de x_d. Todas las derivadas parciales de c son polinomios, luego por la hipótesis inductiva c es un polinomio y también lo es $u = p+c$. □

Proposición. El armónico esférico sólido $U_{n,m}^{\pm}$ es un polinomio homogéneo en x_0, x_1, x_2 de grado n.

12.9. Proposición. Para cada $n \geq 0$, la colección $\{U_{n,m}^{\pm}\colon\ 0 \leq m \leq n\}$ es una base de $\mathrm{Har}_3^{(n)}$. De hecho, es una base ortogonal de $\mathrm{Har}_3^{(n)}(\mathbb{B}^3)$ y también de $\mathrm{Har}_3^{(n)}(\mathbb{S}^2)$.

Demostración. Notemos que los armónicos esféricos son linealmente independientes: puesto que una relación de dependencia lineal entre polinomios homogéneos implica la misma relación de dependencia para sus partes homogéneos de cada grado, es suficiente ver que los armónicos esféricos de un grado n fijo son linealmente independientes. Esto se sigue porque las funciones $\Phi_m^{\pm}$ son linealmente independientes. Ya fue calculado que $\dim \mathrm{Har}_3^{(n)}(\mathbb{B}^3) = 2n+1$, luego los $2n+1$ armónicos esféricos sólidos son una base.

Para la ortogonalidad,

$$\langle U_{n,m}^{\pm},\ U_{n',m'}^{\pm}\rangle_{\mathbb{B}^3} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^{n+n'} P_n^m(\cos\theta) P_{n'}^{m'}(\cos\theta)\Phi_m^{\pm}(\phi)\Phi_{m'}(\phi)$$
$$(r^2\sin\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi.$$

El integrando se factoriza en funciones de r, θ, ϕ y la ortogonalidad se sigue de la ortogonalidad de las $\Phi_m^{\pm}(\phi)$. (Esta ortogonalidad da otra verificación de la independencia lineal.)

Además,

$$\langle U_{n,m}^{\pm},\ U_{n',m'}^{\pm}\rangle_{\mathbb{S}^2} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) P_{n'}^{m'}(\cos\theta)\Phi_m^{\pm}(\phi)\Phi_{m'}(\phi)$$
$$(r^2\sin\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi.$$

□

<u>Proposición.</u> Las normas de los armónicos esféricos sólidos son

$$\|U_{n,m}^{\pm}\|_{\mathbb{B}^3} = \left(\frac{2\pi(1+\delta_{0,m})(n+m)!}{(2n+3)(2n+1)(n-m)!}\right)^{1/2},$$

y las normas de los armónicos esféricos (no sólidos) son

$$\|U_{n,m}^{\pm}\|_{\mathbb{S}^2} = \cdots$$